

Voľná grupa

Úvod a riešené príklady

V poslednej kapitole o grupách si predstavíme grupovú „teóriu všetkého“. Nepôjdeme zdola, teda nebudeme sa zaoberať konkrétnymi grupami ako doteraz, ale pozrieme sa na vec zhora. Predstavíme si čo najzovšeobecnenejšiu ideu grupy a rôzne spôsoby, ako z tejto idey vhodnými podmienkami a zobrazeniami vydolovať jednotlivé známe grupové štruktúry.

Voľný monoid

Je daná množina písmen $X = \{0, a, b, c, d, \dots\}$. X nazveme **abeceda**. Operáciou $\circ$ bude (z)reťazenie (concatenation). Pre prázdny znak 0 platí $0 \circ x = x$, $x \circ 0 = x$. Pre ostatné znaky zreťazenie znamená, že písmená alebo reťazce písmen napíšeme za sebou, napr.

$abcd \circ efgh = abcdefgh$. Reťazec písmen sa nazýva *slovo nad abecedou*.

Označíme $[X]$ množinu všetkých slov, ktoré vieme vygenerovať. Budeme hovoriť, že množina slov $[X]$ je generovaná abecedou X .

Štruktúra $([X], \circ)$ je monoid, keďže $\circ$ je asociatívna operácia a 0 je neutrálny prvok.

Tento monoid je sám osebe nezaujímavý, keďže je úplne všeobecný a je v ňom dovolené skoro všetko. Zajímavými sú až jeho rôzne pod-monoidy, ktoré získame obmedzeniami na základe dodatočných podmienok. Tieto podmonoidy sa nazývajú **jazyky**.

V tomto bode tému monoidov ukončíme, jej pokračovanie nájdete v predmete TZI.

Voľná grupa

Je daná abeceda $X = \{a, b, c, d, \dots\}$. Rozšírime X o inverzné prvky (niekedy sa do rozšírenia pridáva aj neutrálny prvok, označovaný podľa situácie e , 0 alebo 1):

$$\mathcal{X} = \{a, b, c, d, \dots, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}, \dots\}$$

Operácia zreťazenia $\circ$ je daná tak ako pri monoide. (Pozor, $\circ$ nie je komutatívna!)

Množina generovaná rozšírenou abecedou $[\mathcal{X}]$ potrebuje hneď od začiatku poriadok – ak sa v nejakom slove vyskytnú vedľa seba písmeno a jeho inverzný znak, musíme ich škrtnúť. Viacero rovnakých písmen za sebou v záujme prehľadnosti spojíme do "mocniny".

Napr. slovo $abca^{-1}ac^{-1}d$ očistíme nasledovne:

$$abdca^{-1}ac^{-1}d = abdcc^{-1}d = abdd = abd^2$$

Výsledku hovoríme redukovaný tvar. Aj keď niekedy je možné slovo redukovať rôznymi cestami, výsledok bude vždy rovnaký (je jednoznačný). Ďalej budeme ďalej pracovať iba so slovami v redukovanom tvare, teda možnosť redukcie bude zároveň aj nutnosťou.

Množina všetkých slov generovaných abecedou $[\mathcal{X}]$ v redukovanom tvare, spolu s operáciou zreťazenia, teda $([\mathcal{X}], \circ)$, sa nazýva **voľná grupa** nad abecedou X , označuje sa $F(X)$ alebo F_X , prípadne $FG(X)$ alebo FG_X .

Poznámka 1. Ak je z kontextu zrejmé, že hovoríme o voľnej grupe, môžeme zjednodušene písať tiež $[X]$, pričom tomu rozumieme v zmysle $[X] = [\mathcal{X}]$.

Poznámka 2. Neutrálny prvok alebo prázdne slovo je prítomné v množine $[\mathcal{X}]$ aj vtedy, ak sme ho na začiatku do $\mathcal{X}$ nepridali. Napr. ako výsledok redukcie slova $a^{-1}a$.

Poznámka 3. Inverzný prvok vieme nájsť aj k celému slovu, napr.:

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$$

Pozor na zmenu poradia písmen!

$$abc^{\circ}(abc)^{-1} = 0$$

$$abc^{\circ}c^{-1}b^{-1}a^{-1} = abb^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = 0$$

Priamo generovaním z rozšírenej abecedy tvar $(abc)^{-1}$ nedostaneme, môže však byť výsledkom iných postupov a úprav – ale vždy je potrebné vykonať redukciu.

Načo sú dobré voľné grupy a aké je ich miesto v teórii grúp? Odpoveď je viacero, tu uvedieme dve najjednoduchšie. Predovšetkým, voľná grupa predstavuje štruktúru, v ktorej nie sú žiadne obmedzenia okrem úplne základných charakteristík grupy. Je to "najslobodnejší koncept" grupy.

Na druhej strane, tento neobmedzený model grupy vieme cez následne dodané obmedzenia (relácie) pretvoriť na štruktúry izomorfné so všetkými možnými (napr. nám známymi) konkrétnymi grupami. Voľné grupy sú niečo ako "pragrupy" skrývajúce v sebe všetky existujúce grupy, ktoré sa z nich vhodnou *prezentáciou* dajú "vylúsknuť".

Vypíšeme si tri najjednoduchšie voľné grupy:

0. $X = \emptyset, \mathcal{X} = \{e\}, [\mathcal{X}] = \{e\}, F_0 = F(X) = (\{e\}, \circ)$
1. $X = \{a\}, \mathcal{X} = \{e, a, a^{-1}\}, [\mathcal{X}] = \{e, a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, \dots\}, F_1 = ([\mathcal{X}], \circ)$
2. $X = \{a, b\}, \mathcal{X} = \{e, a, a^{-1}, b, b^{-1}\},$
 $[\mathcal{X}] = \{a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\dots b^{k_n} \mid n \in \mathbb{N}, k_1, k_n \in \mathbb{Z}, \text{ ostatné } k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}, F_2 = ([\mathcal{X}], \circ)$

V poslednom výpise nie je úplne dôsledne vyjadrená redukcia slov.

Podobným spôsobom by sme vedeli definovať voľné grupy F_n pre ľubovoľné prirodzené n .

Zjednodušené označenie grupy indexom, tj. F_n namiesto plného $F(X)$ alebo $F_{\mathcal{X}}$ vyjadruje fakt, že z hľadiska štruktúry sú voľné grupy generované akoukoľvek n -prvkovou množinou izomorfné, tj. nie je medzi nimi princípálny rozdiel. Typologicky teda stačí uvádzať počet prvkov bázy.

Niektoré dôležité vlastnosti:

- každá podgrupa voľnej grupy je voľná grupa
- voľné grupy F_m a F_n pre $m \neq n$ nie sú izomorfné
- vo voľnej grupe $F_n, n \geq 2$, vieme nájsť podgrupu izomorfnú s F_n pre každé $n \geq 1$. Tj. napr. F_2 obsahuje o.i. aj podgrupu izomorfnú s F_3 alebo F_5 (skúste ich nájsť).

Posledná zo spomenutých vlastností znie vcelku šialene, ale treba si uvedomiť, že tu pracujeme s nekonečnými množinami a pri nich sme si už podobné paradoxy všimli. Napriek zdanlivej primitívnosti konceptu voľnej grupy je potrebné si zachovať rešpekt...

Voľná grupa a iné grupy – homomorfizmy

Vzťah medzi voľnými grupami a "štandardnými" (tj. doteraz preberanými) grupami vieme vyjadriť a skúmať cez homomorfizmy. Platí dôležitá veta – ak f je zobrazenie generujúcej množiny X do nejakej grupy G , tak sa vždy dá jednoznačne rozšíriť na homomorfizmus $\varphi : F_X \rightarrow G$.

Príklad 1

Je daná voľná grupa F_1 , grupa $(\mathbb{R}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 1$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_1 \rightarrow (\mathbb{R}, +)$. Aká podgrupa $(\mathbb{R}, +)$ bude obrazom F_1 ?

Riešenie:

Pri operácii $+$ v cieľovej štruktúre je zrejmé, že obrazom prvkov a^k budú čísla k , teda $h(a^k) = k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Obraz voľnej grupy : $h(F_1) = (\mathbb{Z}, +)$.

Príklad 2

Je daná voľná grupa F_1 , grupa $(\mathbb{R}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 3$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_1 \rightarrow (\mathbb{R}, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_1 ?

Riešenie:

Pri operácii $+$ v cieľovej štruktúre obrazom prvkov a^k budú čísla $3k$, teda $h(a^k) = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Obraz voľnej grupy : $h(F_1) = (3\mathbb{Z}, +)$.

Príklad 3

Je daná voľná grupa F_1 , grupa $(\mathbb{R}_{\setminus \{0\}}, *)$ a zobrazenie $h(a) = 2$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_1 \rightarrow (\mathbb{R}_{\setminus \{0\}}, *)$. Aká podgrupa bude obrazom F_1 ?

Riešenie:

Pri operácii $*$ v cieľovej štruktúre je zrejmé, že obrazom prvkov a^k budú čísla 2^k , teda $h(a^k) = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Obraz voľnej grupy : $h(F_1) = (\{2^k, k \in \mathbb{Z}\}, *)$.

Príklad 4

Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{R}^2, +)$ a zobrazenie $h(a) = (1, 0)$, $h(b) = (0, 1)$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{R}^2, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

Riešenie:

Pri komutatívnej operácii $+$ v cieľovej množine sa v konečnom výsledku sčítajú "mocniny" prvkov a aj b v slove. Tým sa do istej miery zúži pôvodná rozmanitosť voľnej grupy.

Obrazom prvku $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\dots b^{k_n}$ bude usporiadaná dvojica $(k_1+k_3+\dots, k_2+k_4+\dots)$. Touto cestou dostaneme všetky dvojice hodnôt (m, n) , $m, n \in \mathbb{Z}$.

Obraz voľnej grupy : $h(F_2) = (\mathbb{Z}^2, +)$.

Príklad 5

Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{C}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 1, h(b) = i$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{C}, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

Riešenie:

Pri komutatívnej operácii $+$ v cieľovej grupe sa v konečnom výsledku sčítajú "mocniny" prvkov a aj b v slove. Obrazom prvku $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\dots b^{k_n}$ bude $(k_1+k_3+\dots) + i(k_2+k_4+\dots)$. Touto cestou dostaneme všetky hodnoty $m + in, m, n \in \mathbb{Z}$, teda celočíselné komplexné čísla.
Obraz voľnej grupy : $h(F_2) = (\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}, +)$.

Príklad 6

Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{R}_{\setminus\{0\}}, *)$ a zobrazenie $h(a) = 3, h(b) = 7$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{R}_{\setminus\{0\}}, *)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

Riešenie:

Pri komutatívnej operácii $*$ v cieľovej štruktúre sa v konečnom výsledku sčítajú "mocniny" prvkov a aj b v slove. Obrazom prvku $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\dots b^{k_n}$ bude $3^{k_1+k_3+\dots} * 7^{k_2+k_4+\dots}$. Touto cestou dostaneme všetky hodnoty $3^m * 7^n, m, n \in \mathbb{Z}$.
Obraz voľnej grupy : $h(F_2) = (3^m * 7^n, m, n \in \mathbb{Z}, *)$.

Príklad 7

Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{R}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 3, h(b) = 7$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{R}, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

Riešenie:

Oproti predošlým príkladom sa tu bude ešte viac plytvať potenciálom voľnej grupy – dostaneme výsledok, ktorý by sa dal získať aj homomorfizmom z F_1 .
Obrazom prvku $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\dots b^{k_n}$ bude $3^{k_1+k_3+\dots} + 7^{k_2+k_4+\dots}$. Touto cestou dostaneme všetky hodnoty $z \in \mathbb{Z}$, lebo pre každé z má rovnica $3m+7n=z$ nejaké celočíselné riešenie.
Obraz voľnej grupy : $h(F_2) = (\mathbb{Z}, +)$.

Príklad 8

Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 2, h(b) = 3$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$. Aká (pod)grupa bude obrazom F_2 ?

Riešenie:

Obrazom prvku $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\dots b^{k_n}$ bude $2^{k_1+k_3+\dots} + 3^{k_2+k_4+\dots} \pmod{12}$. Rýchlo overíme, že napr. $h(a^2b^3) = 1$. To znamená, že $h(a^{2n}b^{3n}) = n \pmod{12}$. Vieme teda zacieliť zobrazenie na všetky hodnoty $\mathbb{Z}_{12}$ (surjekcia) a zároveň mod 12 mimo týchto hodnôt nepustí. Obraz voľnej grupy : $h(F_2) = (\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Príklad 9

Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 2, h(b) = 4$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

Riešenie:

Obrazom prvku $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\dots b^{k_n}$ bude $2^{k_1+k_3+\dots} + 4^{k_2+k_4+\dots} \pmod{12}$. Je zrejmé, že budeme dostávať iba párne čísla, pričom vieme vyrobiť všetky párne hodnoty z cieľovej grupy.
Obraz voľnej grupy : $h(F_2) = (2\mathbb{Z}_6, +)$.

Prezentácia voľnej grupy

Prezentácia voľnej grupy znamená určité riadené obmedzenie jej voľnosti. Ak sme najprv pojem grupy uvoľnili zo všetkých pút, teraz tento výsledok budeme spätne obmedzovať tak, aby sme vedeli vyrobiť všetky možné grupové štruktúry.

Prezentácia voľnej grupy vyzerá tak, že okrem generujúcej abecedy X ($\mathcal{X}$) sa v definícii uvedú slová, ktoré určíme ako rovné neutrálnemu prvku. Samozrejme, neutrálnemu prvku sa bude rovnáť všetko, čo pomocou uvedených slov vieme vygenerovať (bude to celá normálna podgrupa).

Voľnú grupu generovanú množinou X pri obmedzení množinou slov E označíme $\langle X \mid E \rangle$. Zápis vyjadruje, že ide o grupu generovanú množinou X ($\mathcal{X}$) a faktorizovanú podľa podgrupy generovanej množinou E .

Príklad 10

Voľnú grupu F_1 môžeme obmedziť slovom a^5 , resp. množinou $E = \{a^5\}$.

Zápis $\langle X \mid E \rangle$ skonkretizujeme takto: $\langle \{a\} \mid \{a^5\} \rangle$.

Množina E vyjadruje, že $a^5 = e$, teda z každého slova vieme škrtnúť alebo do neho pridať päťicu a -čok. Prvky tejto voľnej grupy vieme touto cestou ustáliť ako $\{e, a, a^2, a^3, a^4\}$ – nie je to jediná možnosť, je však najprehľadnejšia. Ide o cyklickú grupu izomorfnú napr. so $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Príklad 11

Voľnú grupu F_2 generovanú $X = \{a, b\}$ obmedzíme množinou slov $E = \{a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1}\}$. Nájdite prezentáciu $\langle X \mid E \rangle$.

Riešenie:

Grupa je generovaná dvojicou generátorov a, b , pričom však prvok a má rád 2 a prvok b má rád 3. Tretie zo slov kóduje komutatívnosť:

$$\begin{aligned} aba^{-1}b^{-1} &= e \\ ab &= ba \end{aligned}$$

Komutatívnosť umožňuje v každom slove pozametať na jednu kopu všetky a aj všetky b . Pri spomenutých rádoch prvkov a, b tak dostávame (vygenerujeme) nasledujúci konečný počet slov:

$$\{e, a, b, ab, b^2, ab^2\}$$

Asi nie je ťažké uvidieť, že ide o grupu izomorfnú napr. so $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$, ale tiež so $(\mathbb{Z}_6, +)$. Tento vzťah vieme v prvom prípade vyjadriť homomorfizmom, ktorý bude rozšírením zobrazenia

$$f(a) = (10), \quad f(b) = (01)$$

V druhom prípade môžeme založiť homomorfizmus na základoch $f(a) = 3, \quad f(b) = 4$.

Príklad 12

Nájdite vhodnú prezentáciu voľnej grupy F_2 tak, aby výsledok bol izomorfný so $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3, +)$.

Riešenie:

Postupovať budeme analogicky (a na konci s podobným homomorfizmom) ako v predošlom príklade. Potrebujeme zabezpečiť prvku a rád 6 a prvku b rád 3, a tiež ich komutatívnosť. Tomu bude zodpovedať množina $E = \{a^6, b^3, aba^{-1}b^{-1}\}$.

Hľadaná prezentácia teda bude $\langle X \mid E \rangle = \langle \{a, b\} \mid \{a^6, b^3, aba^{-1}b^{-1}\} \rangle$

Príklad 13

Nájdite vhodnú prezentáciu voľnej grupy F_n (s čo najmenším n) tak, aby výsledok bol izomorfný s S_3 .

Riešenie:

Pripomenieme si tabuľku pre S_3 :

	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
I	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	I	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	I	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	I	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	I
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	I	(123)

Grupa nie je cyklická, na jej generovanie treba aspoň dva generátory. Krátke skúšanie ukazuje, že napr. dvojica $a = (123)$ a $b = (12)$ vyhovujú – ide o rotáciu trojuholníka a jeho zrkadlové preklopenie, čím získame všetky možné symetrické obrazy.

Podľa tabuľky vidíme, že $aa = (132)$, $ab = (13)$, $ba = (23)$, teda sme pohodlne vygenerovali všetky ostatné permutácie. Napíšeme si znovu tabuľku grupy, kde jednotlivé permutácie nahradíme ich generujúcim predpisom:

	e	b	ab	ba	a	aa
e	e	b	ab	ba	a	aa
b	b	e	aa	a	ba	ab
ab	ab	a	e	aa	b	ba
ba	ba	aa	a	e	ab	b
a	a	ba	ba	b	aa	e
aa	aa	ba	b	ab	e	a

Teraz už ostáva len skontrolovať týchto 36 rovníc daných tabuľkou, aby sme vedeli, aké slová treba zaradiť do množiny E .

Predovšetkým neprekvapujú výsledky skladania s neutrálnym prvkom.

Niektoré výsledky sú jednoduchým zložením vstupných hodnôt bez úprav.

Rovnako sa dalo očakávať, že $b^2=bb=e$ a podobne $a^3=aaa=e$. Na základe toho rozumieme viacerým ďalším výsledkom.

Ostalo niekoľko výsledkov, ktoré overíme podrobnejšie (nevypisujeme opakujúce sa prípady.)

$bab=aa$, $baba=e$, $baa=ab$, $baab=a$, $aba=b$, $abab=e$, $abaa=ba$, $aaba=ab$, $abab=e$, $aab=ba$

Pozorná analýza ukazuje, že všetky uvedené rovnosti sú si navzájom ekvivalentné. Vyberme ako ich reprezentanta tvrdenie $aba=b$ a ukážeme, ako z neho dostať tie ostatné násobením zľava a sprava vhodnými hodnotami.

$$aba = b$$

$$b \text{ } aba \text{ } aa = b \text{ } b \text{ } aa \rightarrow bab = aa$$

$$b \text{ } aba = b \text{ } b \rightarrow baba = e$$

$$aba \text{ } aa = b \text{ } aa \rightarrow ab = baa$$

$$aba \text{ } aab = b \text{ } aab \rightarrow a = baab$$

$$aba \text{ } b = b \text{ } b \rightarrow abab = e$$

$$aba \text{ } a = b \text{ } a \rightarrow abaa = ba$$

$$a \text{ } aba = a \text{ } b \rightarrow aaba = ab$$

$$aba \text{ } b = b \text{ } b \rightarrow abab = e$$

$$aa \text{ } aba = aa \text{ } b \rightarrow ba = aab$$

Do množiny E budeme teda musieť zaradiť (okrem rádu prvkov a, b) reláciu $aba=b$, ktorú bude reprezentovať slovo $abab^{-1} = abab$.

Záver

Ako izomorfný predobraz S_3 môžeme vziať nasledujúcu prezentáciu voľnej grupy F_2 :

$$\langle \{a, b\}, \{a^3, b^2, (ab)^2\} \rangle$$

Neriešené príklady

1. Nájdite redukovaný tvar nasledujúcich slov:

- a) $a^{-1}abcc^{-1}b^{-1}abccddddd^{-1}d$
- b) $adc^{-1}bb^{-1}a^{-1}acbdabb^{-1}da$
- c) $abcd(abcd)^{-1}$
- d) $abc^{-1}c(ad^{-1}db)^{-1}$

2. Je daná voľná grupa F_1 , grupa $(\mathbb{R}, +)$ a zobrazenie $h(a) = -2$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_1 \rightarrow (\mathbb{R}, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_1 ?

3. Je daná voľná grupa F_1 , grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ a zobrazenie $h(a) = 1/2$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_1 \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$. Aká podgrupa bude obrazom F_1 ?

4. Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{R}^2, +)$ a zobrazenie $h(a) = (2, 0)$, $h(b) = (0, -3)$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{R}^2, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

5. Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{C}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 3$, $h(b) = 2i$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{C}, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

6. Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ a zobrazenie $h(a) = 5$, $h(b) = 11$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

7. Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 3$, $h(b) = 7$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{Z}_{15}, +)$. Aká (pod)grupa bude obrazom F_2 ?

8. Je daná voľná grupa F_2 , grupa $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ a zobrazenie $h(a) = 5$, $h(b) = 10$. Rozšírte h na homomorfizmus $F_2 \rightarrow (\mathbb{Z}_{15}, +)$. Aká podgrupa bude obrazom F_2 ?

9. Nájdite vhodnú prezentáciu voľnej grupy, ktorá bude izomorfná s grupou G

- a) $G = (\mathbb{Z}_7, +)$
- a) $G = (\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *)$
- c) $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7, +)$
- d) $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, +)$

10.* Nájdite prezentáciu voľnej grupy s čo najmenším počtom generátorov, ktorá bude izomorfná s A_4 .

11.** Nájdite prezentáciu voľnej grupy s čo najmenším počtom generátorov, ktorá bude izomorfná s S_4 .

12.* Nájdite prezentáciu voľnej grupy s čo najmenším počtom generátorov, ktorá bude izomorfná s D_6 (grupa symetrií pravidelného šesťuholníka).