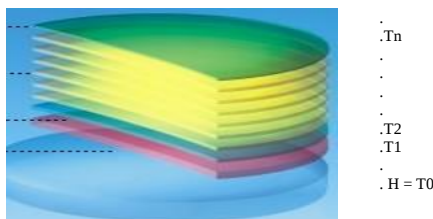


Rozklad grupy podľa podgrupy

Úvod

Ak má grupa G netriviálnu podgrupu H , tak si ju vieme predstaviť ako viacrozmernú štruktúru. Ak je základňou H , v smere ďalšej dimenzie vrstvíme triedy "akoby paralelné" s H .



Takéto rozkrájanie grupy G na vrstvy podľa podgrupy H sa nazýva rozklad G podľa H alebo stručne G/H .

- Pokiaľ operácia nie je komutatívna, rozklad zľava nemusí byť rovnaký ako rozklad sprava.
- Ak sú rozklady podľa H zľava a sprava rovnaké (aj napriek prípadnej nekomutatívnosti operácie), potom sa H nazýva normálna. Samozrejme, pri komutatívnej operácii je každá podgrupa normálna.
- Rozklad na triedy podľa normálnej podgrupy umožňuje "preniesť" operáciu z prvkov na triedy ako celky (kongruencia). A aj keď bola pôvodná operácia nekomutatívna, po jej prenose na triedy sa stane komutatívnou! Podgrupa H bude potom neutrálnym prvkom.

Riešené príklady I (komutatívna operácia)

Príklad 1

Je daná grupa $G = (\mathbb{Z}, +)$ a jej podgrupa $H = (4\mathbb{Z}, +)$, tj. násobky čísla 4. Nájdite rozklad grupy G podľa podgrupy H .

Riešenie:

Budeme postupne brať jednotlivé prvky/čísla x zo $\mathbb{Z}$ a pozrieme sa, ako budú vyzerat' "posunuté" množiny $x + 4\mathbb{Z}$. Pripočítanie čísla x ku množine znamená, že ku každému prvku z množiny pripočítame x . Začneme napr. od 0 (lebo niekde začať treba):

$$0 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots \}$$

$$1 + 4\mathbb{Z} = \{ 1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots \}$$

$$2 + 4\mathbb{Z} = \{ 2 + 4k, k \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots \}$$

$$3 + 4\mathbb{Z} = \{ 3 + 4k, k \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots \}$$

$$4 + 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$$

$$5 + 4\mathbb{Z} = 1 + 4\mathbb{Z}$$

...

Vidíme, že originálne výsledky sme dostali pre štyri po sebe idúce čísla (u nás 0, 1, 2, 3). Pre ďalšie čísla sa už výsledky opakujú (a pre záporné by sa opakovali tiež). Získané "posunuté" množiny (každú berieme do úvahy iba jedenkrát), tzv. **triedy**, sú hľadaným rozkladom grupy:

$$G/H : T_0 = 4\mathbb{Z}$$

$$T_1 = 4\mathbb{Z} + 1$$

$$T_2 = 4\mathbb{Z} + 2$$

$$T_3 = 4\mathbb{Z} + 3$$

Slovne opísané – rozklad množiny celých čísel podľa čísel deliteľných štvorkou produkuje zvyškové triedy po delení 4-kou.

V úvode spomínaná viacrozmerná štruktúra určená podgrupou potom vyzerá nasledovne (už to bolo napísané vyššie, tu to len zvýrazníme):

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{Z} = & \dots & -8, & -4, & 0, & 4, & 8, & 12, & \dots \\ & \dots & -7, & -3, & 1, & 5, & 9, & 13, & \dots \\ & \dots & -6, & -2, & 2, & 6, & 10, & 14, & \dots \\ & \dots & -5, & -1, & 3, & 7, & 11, & 15, & \dots \end{array}$$

Pokračujme v úvahách. Pozrieme sa na získané triedy ako na prvky nejakej grupy:

$$(\{T_0, T_1, T_2, T_3\}, +)$$

Operáciu (v tomto príklade $+$) vieme aplikovať/preniesť aj na triedy ako celky (v tabuľke nižšie), tj. máme kongruenciu. Akýkoľvek prvok by sme vzali z nejakých tried T_i a z T_j , ich súčet padne vždy do rovnakej T_k . Môžeme teda hovoriť o sčítovaní tried.

Aplikácia operácie $+$ na triedy (súčet tried znamená súčet každého prvku z T_i s každým z T_j):

$+$	T0	T1	T2	T3
T0	T0	T1	T2	T3
T1	T1	T2	T3	T0
T2	T2	T3	T0	T1
T3	T3	T0	T1	T2

Ak si odmyslíme písmeno T, uvedená tabuľka by nám mohla niečo pripomínať. Prídeme na to, keď spravíme posledný krok – "oslobodíme" jednotlivé triedy od toho, čo majú navzájom spoločné, a ponecháme im len to, čím sa od seba líšia – a to sú práve čísla 0,1,2,3. Inými slovami, nájdeme ku "grupe tried" čo najjednoduchší izomorfný ekvivalent:

$$(\{T0, T1, T2, T3\}, +) \sim (\{0, 1, 2, 3\}, +_{\text{mod } 4}) = (\mathbb{Z}_4, +)$$

Pôvodnú grupu $(\mathbb{Z}, +)$ si potom vieme predstaviť ako $4\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_4$.

Príklad 2

Nájdite rozklad $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ podľa $(3\mathbb{Z}_4, +_{\text{mod } 12})$.

Riešenie:

Podobným postupom ako v predošlom príklade dostávame:

$$\begin{aligned} T0 &= 3\mathbb{Z}_4 = \{0, 3, 6, 9\} \\ T1 &= 1 + 3\mathbb{Z}_4 = \{1, 4, 7, 10\} \\ T2 &= 2 + 3\mathbb{Z}_4 = \{2, 5, 8, 11\} \end{aligned}$$

!! Všimnime si, že počet tried krát mohutnosť podgrupy sa rovná mohutnosti pôvodnej grupy.

Operácia $+_{\text{mod } 12}$ sa dá preniesť na triedy (ubezpečte sa):

$+$	T0	T1	T2
T0	T0	T1	T2
T1	T1	T2	T0
T2	T2	T0	T1

Prejdeme k jednoduchšej izomorfnej paralele:

$$(\{T0, T1, T2\}, +_{\text{mod } 12}) \sim (\{0, 1, 2\}, +_{\text{mod } 3}) = (\mathbb{Z}_3, +)$$

$$\mathbb{Z}_{12} = 3\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_3$$

Príklad 3

Nájdite rozklad $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$ podľa $H = [(22)]$.

Poznámka 1:

Operácia $+$ v grupe sa aplikuje modulo 4 na prvej zložke a modulo 6 na druhej. Z úsporných dôvodov pri zápise neoddeľujeme zložky medzerou ani čiarkou.

Poznámka 2:

Zápis $[(22)]$ tu označuje podgrupu generovanú prvkom (22) . Ide o množinu $\{(22), (04), (20), (02), (24), (00)\} = 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_3$

Riešenie:

Postupným skúšaním všetkých prvkov sa určite vieme dopracovať k rozkladu na triedy (ak treba, choďte touto cestou). Skúsme však zapojiť intuíciu a ušetríme si kus práce.

Predovšetkým si ozrejmime, že ak má grupa 24 prvkov a podgrupa 6, tak musíme dostať 4 triedy. Ďalej si všimnime, že podgrupu tvoria prvky s párnymi číslami na oboch zložkách. Chýbajú kombinácie (nepárne, nepárne), (párne, nepárne) a (nepárne, párne). Danú podgrupu teda "posunieme" postupne prvkami (11) , (01) a (10) . Potom uvidíme, že sme dostali 4 disjunktné množiny, ktorých zjednotením je pôvodná grupa, a rozklad bude hotový (bude jasné, že posúvaním o iné hodnoty už nič nové nedostaneme).

$$T_{00} = (00) + 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_3 = \{(22), (04), (20), (02), (24), (00)\}$$

$$T_{01} = (01) + 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_3 = \{(23), (05), (21), (03), (25), (01)\}$$

$$T_{10} = (10) + 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_3 = \{(32), (14), (30), (12), (34), (10)\}$$

$$T_{11} = (11) + 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_3 = \{(33), (15), (31), (13), (35), (11)\}$$

Operácia $+$ (vo vyššie definovanom zmysle) sa tu opäť dá preniesť na triedy. (Overte, že tabuľka je zostavená správne!)

+	T00	T01	T10	T11
T00	T00	T01	T10	T11
T01	T01	T00	T11	T10
T10	T10	T11	T00	T01
T11	T11	T10	T01	T00

Označenie tried (indexy pri T) si síce môžeme zvoliť ako len chceme, je však výhodné použiť také označenie, ktoré čo najlepšie charakterizuje triedu a pomôže nám v poslednom kroku – hľadaní najjednoduchšej izomorfnej reprezentácie získaného rozkladu:

$$(\{T_{00} T_{01} T_{10} T_{11}\}, +_{/ \bmod 4,6}) \sim (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_{/ \bmod 2,2})$$

$+ / \bmod 2,2$	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

$$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +) = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_{/ \bmod 2,2}) + (2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_3, +_{/ \bmod 4,6})$$

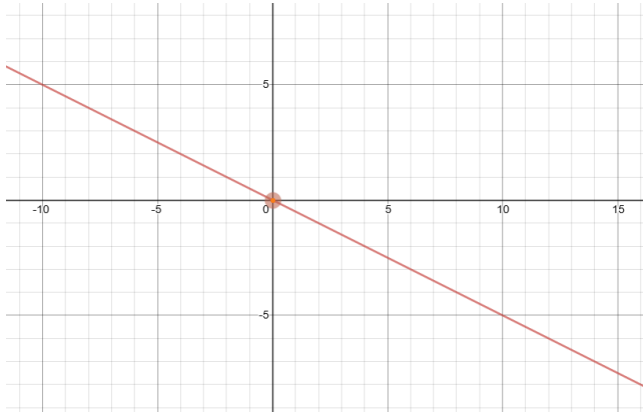
Príklad 4

Nájdite rozklad $G = (\mathbb{R}^2, +)$ podľa $H = (\{(2t, -t), t \in \mathbb{R}\}, +)$

DÚ: ubezpečte sa, že H je naozaj podgrupou G .

Riešenie:

Na začiatok je veľmi prospešné si grupu aj podgrupu nakresliť (rovina a v nej priamka).



Ak budeme k priamke/podgrupe pripočítavať rozličné hodnoty (x, y) z $\mathbb{R}^2$, bude sa priamka posúvať tak, aby prechádzala cez bod (x, y) . Vzhľadom na nekonečnosť priamky je jasné, že vieme preložiť priamku cez ľubovoľný bod (x, y) pomocou posúvania napr. iba v smere osi y . Inými slovami, rovnica $(2t, -t) + (0, c) = (x, y)$ je vždy riešiteľná ($t = x/2$ a $c = y + x/2$).

Z uvedeného dôvodu, aby sme získali všetky triedy rozkladu a neplytvali redundantnými výsledkami, stačí k priamke/podgrupe H pripočítavať len hodnoty $(0, c)$. Tried je veľa, priam nespočítateľne, vypíšeme ich teda všetky naraz jedným predpisom:

$$T_c = H + (0, c), \quad c \in \mathbb{R}$$

Nakoniec ešte nájdeme jednoduchšiu grupu izomorfnú s nájdenu grupou tried – je to grupa **všetkých možných hodnôt c** :

$$(\{T_c, c \in \mathbb{R}\}, +) \sim (\mathbb{R}, +)$$

Príklad 5

Nájdite rozklad $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, *)$ podľa $H = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$.

Riešenie:

Kľúčom k úspechu pri tomto príklade je vhodný zápis komplexných čísel – v exponenciálnom tvare. Uvedené množiny potom zapíšeme takto:

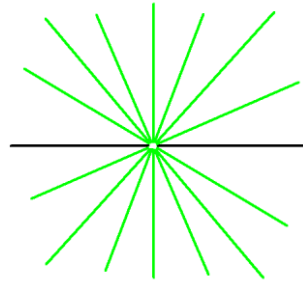
$$G = (\{r * e^{ik\pi}, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in [0,1)\}, *) , H = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *) .$$

Súčin H a prvkov z G (pri hľadaní rozkladu) vyzerá takto:

$$r * e^{ik\pi} * \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} * e^{ik\pi}$$

Hodnota r sa tu "stratí" v nekonečnosti reálnej osi. Vplyvná bude iba hodnota $k\pi$, ktorá spôsobí otočenie reálnej osi, teda podgrupy H , o uhol $k\pi$. Jednotlivé triedy budú teda určené len číslom k a budú predstavovať otočenia H okolo počiatku:

$$T_k = \mathbb{R} * e^{ik\pi}, k \in [0,1)$$



V poslednom kroku ešte nájdeme jednoduchší izomorfný ekvivalent grupy rozkladu:

$$(\{T_k, k \in [0,1)\}, *) \sim ([0,1), +_{/\text{frac}})$$

Poznámka 1: Označenie $+_{/\text{frac}}$ (požičané z Pascalu) predstavuje operáciu $+$ a ponechanie iba desatinnej časti výsledku.

Poznámka 2: Prečo sa zmenilo $*$ na $+$?

Riešené príklady II (nekomutatívna operácia)

Príklad 1

Nájdite pravý a ľavý rozklad S_3 (permutácie trojice prvkov, označených 1,2,3) podľa $H_{12} = \{I, (12)\}$. Zistite, či je H_{12} normálna.

Riešenie:

Rozklady nájdeme "od podlahy" tak, že prvky podgrupy H_{12} zložíme zľava aj sprava so všetkými ostatnými prvkami S_3 . Výsledky zhrnieme pod čiarou.

Ľavý rozklad	$p^\circ\{I, (12)\}$:	Pravý rozklad	$\{I, (12)\}^\circ p$:
$I^\circ I$	$= I$	$I^\circ I$	$= I$
$I^\circ (12)$	$= (12)$	$(12)^\circ I$	$= (12)$
$(12)^\circ I$	$= (12)$	$I^\circ (12)$	$= (12)$
$(12)^\circ (12)$	$= I$	$(12)^\circ (12)$	$= I$
$(13)^\circ I$	$= (13)$	$I^\circ (13)$	$= (13)$
$(13)^\circ (12)$	$= (123)$	$(12)^\circ (13)$	$= (132)$
$(123)^\circ I$	$= (123)$	$I^\circ (132)$	$= (132)$
$(123)^\circ (12)$	$= (13)$	$(12)^\circ (132)$	$= (13)$
$(23)^\circ I$	$= (23)$	$I^\circ (23)$	$= (23)$
$(23)^\circ (12)$	$= (132)$	$(12)^\circ (23)$	$= (23)$
$(132)^\circ I$	$= (132)$	$I^\circ (23)$	$= (23)$
$(132)^\circ (12)$	$= (23)$	$(12)^\circ (23)$	$= (123)$
$T_0 = \{I, (12)\}$ $T_1 = \{(13), (123)\}$ $T_2 = \{(23), (132)\}$		$T_0 = \{I, (12)\}$ $T_1 = \{(13), (132)\}$ $T_2 = \{(23), (123)\}$	

Ľavý a pravý rozklad nie sú rovnaké. To znamená, že podgrupa H_{12} nie je normálna.

Kto chce, môže sa presvedčiť o tom, že v danom príklade nie je možné operáciu (skladanie permutácií) preniesť na celé triedy (skúste zložiť všetky prvky z T_2 s prvkami T_3 , výsledky padnú do viacerých tried). Normálnosť podgrupy a kongruencia držia pevne spolu.

Príklad 2

Nájdite pravý a ľavý rozklad S_3 podľa $A_3 = \{I, (123), (132)\}$.

Poznámka: Overte, že A_3 je podgrupou S_3 .

Riešenie:

Kto si chce precvičiť skladanie permutácií alebo si chce všetky súvislosti ohmatať "od základov", môže postupovať rovnako ako v predošlom príklade. Príklad sa však dá vyriešiť aj rýchlejšie. Podgrupa párnych permutácií A_3 z hľadiska počtu prvkov predstavuje presne polovicu S_3 . Pri rozklade S_3 podľa A_3 teda vzniknú dve triedy – prvou je A_3 a v druhej bude všetko to, čo nie je v A_3 . Iná možnosť nie je a to sme sa ešte nestihli opýtať, či ide o ľavý alebo pravý rozklad (tj. výsledok nie je od toho závislý).

Rozklad (ľavý aj pravý):
 $T_0 = \{I, (123), (132)\}$
 $T_1 = \{(12), (13), (23)\}$

Podgrupa A_3 je v tomto prípade normálna. Ubezpečme sa ešte, že rozklad na triedy bude kongruencia.

Ľahko overíme, že zloženie dvoch prvkov z T_0 dáva vždy výsledok z T_0 , podobne dva prvky z T_1 dajú výsledok z T_0 . Jeden prvok z T_0 a druhý z T_1 (v akomkoľvek poradí) dajú vždy výsledok z T_1 . Je to teda kongruencia, presnejšie – relácia ekvivalencie určená triedami rozkladu rešpektuje operáciu.

To znamená, že operácia skladania permutácií sa dá "preniesť" na celé triedy rozkladu.

$\circ$	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_1	T_0

Vidíme, že ide o štruktúru izomorfnú so $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Príklad 3

Je daná množina permutácií $H = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$.

a) Dokážte, že $(H, \circ)$ je grupa a teda tiež podgrupa grúp A_4 (= párne permutácie 1,2,3,4)
a S_4 (= všetky permutácie 1,2,3,4).

b) Ktorá známa grupa je izomorfná s H ?

c) Nájdite rozklad A_4 podľa H . Je H normálna?

Riešenie:

a) H je konečnou podmnožinou konečnej grupy S_4 aj A_4 . Stačí preto len overiť, že H je uzavretá vzhľadom na operáciu, teda overíme zloženie každej permutácie s každou.

– skladanie identity s inou permutáciou je triviálnym spôsobom v poriadku

– skladanie permutácie z H so sebou samou dáva identitu

– ostáva ešte overiť 6 dvojíc :

$$(12)(34) \circ (13)(24) = (14)(23)$$

$$(12)(34) \circ (14)(23) = (13)(24)$$

$$(13)(24) \circ (14)(23) = (12)(34)$$

$$(13)(24) \circ (12)(34) = (14)(23)$$

$$(14)(23) \circ (13)(24) = (12)(34)$$

$$(14)(23) \circ (12)(34) = (13)(24)$$

Všetky výsledky sa "vracajú" do H , tj. H je uzavretá vzhľadom na operáciu $\circ$ a je podgrupou S_4 aj A_4 .

Poznámka. Dôkaz, že H je grupa, môžeme urobiť aj jednoduchšie (geometrickou cestou), ak si uvedomíme, aký typ symetrie štvorca predstavuje každá z permutácií v H :

1	2
3	4

$(12)(34)$ znamená symetriu podľa osi y

$(13)(24)$ znamená symetriu podľa osi x

$(14)(23)$ znamená symetriu podľa stredu

Pri všetkých týchto symetriách ostávajú dvojice 1,2 a 3,4 v jednom riadku, dvojice 1,3 a 2,4 v jednom stĺpci. Z tohto rámca nevybočíme, nedá sa. V tomto rámci sú možné len uvedené tri možnosti + pôvodný stav.

b) Napíšme si Cayleyho tabuľku pre $(H, \circ)$:

$\circ$	I	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
I	I	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(34)	(12)(34)	I	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(14)(23)	I	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	I

Hoci skladanie permutácií vo všeobecnosti nie je komutatívne, v rámci H komutatívnosť platí.

Vzhľadom na to, že z hľadiska štruktúry existujú iba dva typy štvorprvkovej grupy, nie je ťažké prísť na to, že $(H, \circ)$ je izomorfná so $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$, keďže so $(\mathbb{Z}_4, +)$ evidentne nie je.

c) Nájďme rozklad A_4 podľa H. Grupa párnych permutácií A_4 má 12 prvkov, rozkladať sa teda bude na tri triedy po 4 prvky.

$$A_4 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243) \}$$

Trieda T_0 je jasná. Nájďme triedu T_1 (rozumným hľadaním, zľava aj sprava) a ako sme už v predošlých príkladoch videli, T_2 hľadať nemusíme – v T_2 bude to, čo ostane.

Ľavý rozklad:	Pravý rozklad:
$(123)^\circ(12)(34)=(134)$	$(12)(34)^\circ(123)=(243)$
$(123)^\circ(13)(24)=(243)$	$(13)(24)^\circ(123)=(142)$
$(123)^\circ(14)(23)=(142)$	$(14)(23)^\circ(123)=(134)$
$(134)^\circ(12)(34)=(123)$	$(12)(34)^\circ(134)=(142)$
$(134)^\circ(13)(24)=(142)$	$(13)(24)^\circ(134)=(243)$
$(134)^\circ(14)(23)=(243)$	$(14)(23)^\circ(134)=(123)$
$(243)^\circ(12)(34)=(142)$	$(12)(34)^\circ(243)=(123)$
$(243)^\circ(13)(24)=(123)$	$(13)(24)^\circ(243)=(134)$
$(243)^\circ(14)(23)=(134)$	$(14)(23)^\circ(243)=(142)$
$(142)^\circ(12)(34)=(243)$	$(12)(34)^\circ(142)=(134)$
$(142)^\circ(13)(24)=(134)$	$(13)(24)^\circ(142)=(123)$
$(142)^\circ(14)(23)=(123)$	$(14)(23)^\circ(142)=(243)$
$T_0 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$	$T_0 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$
$T_1 = \{ (123), (134), (142), (243) \}$	$T_1 = \{ (123), (134), (142), (243) \}$
$T_2 = \{ (124), (234), (132), (143) \}$	$T_2 = \{ (124), (234), (132), (143) \}$

Porovnajme ľavú a pravú stranu výpočtov – všimnime si, že operácia skladania permutácií nie je komutatívna a pri zmene poradia vychádzajú odlišné výsledky. Napriek tomu rozklad zľava aj sprava vychádza rovnako (!), teda H ako podgrupa A_4 je normálna (z toho ešte nevyplýva automaticky, že H je normálnou podgrupou S_4 – to treba overiť). Odlišné výsledky na úrovni permutácií sa tu zrovnajú na úrovni tried.

Vieme teda napísať Cayleyho tabuľku operácie skladania prenesenej na triedy rozkladu. Keďže triedy sú tri, výsledok bude izomorfný so $(\mathbb{Z}_3, +)$.

Poznámka. Všimnime si (v ľavom aj pravom rozklade), že už prvé tri rovnice nám presne určili triedu T_1 . Zvyšnými 9 rovnicami sa len ubezpečujeme, že naozaj „nám to nevyskočí von“, avšak s trochou skúseností a porozumenia veci môžeme v budúcnosti túto časť výpočtov vynechať – budeme totiž vedieť, že to musí vyjsť.

Dodatok k príkladu 3

Je daný pravidelný štvorsten s vrcholmi 1,2,3,4. Nájdite grupu všetkých jeho rotácií.

Rotáciou sa rozumie to, že položíme štvorsten na papier, obkreslíme jeho podstavu, potom ho nejak pootáčame a opäť položíme (rovnakou alebo inou stenou) do nakreslených obrysov podstavy. Pri rotácii nie sú možné zrkadlové preklopenia.

Riešenie:

Najprv si ozrejmieme, koľko rotácií štvorstena existuje. Treba si pritom uvedomiť, že ak napr. rozhodnem, kde budú vrcholy 1,2, tak pozícia vrcholov 3,4 už je určená. Stačí sa teda pýtať, koľkými spôsobmi vieme umiestniť vrcholy 1,2 na 4 možné pozície. Odpoveď je $(4 \text{ nad } 2) = 12$. Hľadáme teda 12-prvkovú grupu.

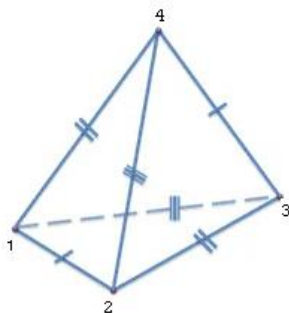
Teraz už treba len pozorne vymenovať všetky možné rotácie.

Jednoduché rotácie okolo vrchola – jeden vybraný vrchol "stojí" a ostatné 3 sa pretočia doprava alebo doľava:

$(123), (132), (134), (143), (124), (142), (234), (243)$

Otočenia okolo priamky pretínajúcej stredy protiľahlých strán (3 možnosti označené /, //, ///):

$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$



Máme 11 rotácií, spolu s identitou je to 12. Ďalej hľadať netreba, máme všetky.

Ako vidno, grupa rotácií štvorstena je stará známa A_4 . Podgrupa H skúmaná vyššie, to sú otočenia o 180 stupňov okolo stredov protiľahlých strán a ešte identita.

Neriešené príklady

1. Rozložte G podľa H . Nájdite najjednoduchšiu izomorfnú paralelu k nájdenému rozkladu.

* Úloha je za 4 bežné príklady.

- a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (5\mathbb{Z}, +)$
- b) $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $H = (6\mathbb{Z}_2, +)$
- c) $G = (\mathbb{Z}_{21}, +)$, $H = (7\mathbb{Z}_3, +)$
- d) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$
- e) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$
- f) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = (\mathbb{R}, +)$
- g) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}, +)$
- h) $G = (\mathbb{C}_{\{0\}}, *)$, $H = (\mathbb{R}^+, *)$
- i) $G = (\mathbb{C}_{\{0\}}, *)$, $H = (\{c \in \mathbb{C}, c^6 \in \mathbb{R}\}, *)$
- j) $G = (\{c \in \mathbb{C}, c^{12} = 1\}, *)$, $H = (\{c \in \mathbb{C}, c^4 = 1\}, *)$
- k) $G = (\{c \in \mathbb{C}_{\{0\}}, c^{99} \in \mathbb{R}\}, *)$, $H = (\mathbb{R}^+, *)$
- l) $G = (\mathbb{C}_{\{0\}}, *)$, $H = (\{c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}, *)$

2. Je daná množina permutácií $H = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Nájdite ľavý a pravý rozklad S_4 podľa H . Je H normálna?

3. Nájdite ľavé a pravé rozklady S_4 podľa S_3 . Je S_3 normálna podgrupa?

4. Nájdite grupu H všetkých zobrazení štvorca s vrcholmi 1,2,3,4 do seba. Určte ľavý a pravý rozklad S_4 podľa H . Je H normálnou podgrupou S_4 ?

5.* Nájdite všetky netriviálne podgrupy A_4 . Ktoré z nich sú normálne?

6.* Nájdite všetky netriviálne cyklické podgrupy S_4 . Ktoré z nich sú normálne?

7.* Nájdite grupu K všetkých rotácií kocky (zobrazení do seba bez zrkadlových obrazov). Zistite, či je izomorfná s S_4 .

8. Sú dané matice 3×3 (zápis v Matlabovskej konvencii – bodkočiarka označuje nový riadok):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Prepíšte matice na papier štandardným spôsobom.

b) Dokážte, že $(M, *) = (\{I, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, *)$, kde $*$ je bežné maticové násobenie, je grupa. Napíšte jej Cayleyho tabuľku.

c) Nájdite všetky podgrupy M .

d) Nájdite rozklad M , pravý aj ľavý, podľa jednej dvojprvkovej a jednej trojprvkovej podgrupy. Vyjadrite sa k normálnosti týchto podgrúp.

e) M je izomorfná s grupou, ktorej sme sa už venovali. Ktorá to je?