AŠ 21.6.2016 Meno: Priezvisko:

Príklad 1 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *a* f *je v Tab.*

I_M	1	2	3	4	5	6	7	8
f	1	5	4	3	2	7	8	6

Riešenie 1 *a) Nájdite všetky disjunktné cykly* f *a najmenšie také* k*, aby* $f^k = I_M$*.*

cykly	c_1	c_2		c_3		c_4		
I_M	1	2	5	4	3	6	7	8
f	1	5	2	3	4	7	8	6

$k = 6$

b) Vypočítajte f^3 *a* f^{-1}*.*

I_M	1	2	3	4	5	6	7	8
f	1	5	4	3	2	7	8	6
f^2	1	2	3	4	5	8	6	7
f^3	1	5	4	3	2	6	7	8
f^{-1}	1	5	4	3	2	8	6	7

Príklad 2 *Máme grupu* $(Z_{12}, +, 0)$*.*
a) Nájdite všetky jej podgrupy a označte takú cyklickú podgrupu, ktorej generátor má rád 6*. Načrtnite Hasseho diagram (usporiadanie inklúziou). Je to zväz?*
b) Nech S *je podgrupa* Z_{12} *s vlastnosťou, že* $|S| = 4$*. Nájdite* Z_{12}/S*.*

Riešenie 2 *a) Podgrupy:*

$$\begin{array}{ccc}
 & G_{12} = Z_{12} & \\
\nearrow & & \nwarrow \\
G_6 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} & & G_4 = \{0, 3, 6, 9\} \\
\uparrow & \nwarrow \uparrow & \\
G_3 = \{0, 4, 8\} & & G_2 = \{0, 6\} \\
\nwarrow & & \nearrow \\
 & G_1 = \{0\} &
\end{array}$$

$$r(2) = r(4) = r(6) = r(8) = r(10) = 6.$$

Je to zväz.

b) $S = G_4$ *a*

$$Z_{12}/S = \{\{0, 3, 6, 9, \}, \{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8, 11\}\}$$

Príklad 3 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* $\gamma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.
a) Nájdite najmenšiu takú reláciu α, *pre ktorú platí:* $\gamma \subset \alpha$ *a* α *je reláciou ekvivalencie.*
b) Nájdite najmenšiu takú reláciu β, *pre ktorú platí:* $\gamma \subset \beta$ *a* β *je reláciou usporiadania.*
c) Vypočítajte $\alpha\beta$ *a* $\beta\alpha$.

Riešenie 3 *a–b) Pretože obe sú reflexívne a transitívne a*
relácia usporiadania je antisymetrická, $\Rightarrow \beta = \{(i, i);\ i \in M\} \cup \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$
relácia ekvivalencie je symetrická, $\Rightarrow \alpha = \beta \cup \{(2, 1), (2, 3), (3, 1)\}$.

c) $\alpha\beta = \{(a, b) \in M^2;\ \exists c \in M : (a, c) \in \alpha \ \&\ (c, b) \in \beta\}$. $\Rightarrow$ $(i, i) \in \alpha\beta$ $i \in M$ *a naviac ak* $i \neq 4$, *tak* $(i, 1) \in \alpha$ *a* $(1, j) \in \beta$ $\forall j \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow (i, j) \in \alpha\beta$, $\forall i, j \neq 4$. *Teda* $\alpha\beta = \alpha$.

$\beta\alpha = \{(a, b) \in M^2;\ \exists c \in M : (a, c) \in \beta \ \&\ (c, b) \in \alpha\}$. $\Rightarrow$ $(i, i) \in \beta\alpha$ $i \in M$ *a naviac ak* $i \neq 4$, *tak* $(i, i) \in \beta$ *a* $(i, j) \in \alpha$ $\forall j \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow (i, j) \in \beta\alpha$, $\forall i, j \neq 4$. *Teda* $\beta\alpha = \alpha\beta = \alpha$.

Príklad 4 *Zistite, či* $(R - \{0\}, *)$ *je grupa, ak* $a * b = 2ab$.

Riešenie 4 $*$ *je binárna operácia* $(R - \{0\}, *)$ *je grupoid.*
Asociativita: $(a * b) * c = (2ab) * c = 2(2ab)c = 2a(2bc) = a * (b * c)$ *a* $a * b = b * a \Rightarrow (R - \{0\}, *)$ *je komutatívna pologrupa.*
Neutrálny prvok e: Ak $a * e = a \Rightarrow 2ae = a \Rightarrow 2e = 1 \Rightarrow e = \frac{1}{2}$.
Inverzný prvok a^{-1}: *Nech* $a \in R - \{0\}$, *ak* a^{-1} *je inverzný prvok k* $a \Rightarrow a * a^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2aa^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{4a}$.
Záver: $(R - \{0\}, *)$ *je komutatívna grupa.*

Príklad 5 *Nech* $h : Z_3 \times Z_2 \to Z_4$ *je zobrazenie definované predpisom:* $h(a, b) = a + b \ (mod\, 4)$. *Zistite, či zobrazenie h je injektívne, surjektívne a či sa jedná o homomorfizmus.*

Riešenie 5 *Tabuľka pre zobrazenie h:*

h	0	1
0	0	1
1	1	2
2	2	3

Z tablky vidíme, že h je surjektívne $(h(Z_3 \times Z_2) = Z_4)$.
Pretože $(1, 0) \neq (0, 1)$ *a* $h(1, 0) = 1 = h(0, 1) \Rightarrow h$ *nie je injektívne.*
Homomorfizmus:

$$h((a, b) + (c, d)) = h(a + c, b + d) = a + c + b + d = (a + b) + (c + d) = h(a, b) + h(c, d) \qquad (mod\, 4)$$

$\Rightarrow$ *h je homomorfizmus.*

Príklad 6 *Máme okruh* $Z_4 \times Z_6$.
a) Zistite rády nasledujúcich prvkov: $(2,2), (2,5), (2,3)$.
b) Nájdite delitele nuly, ak existujú.

Riešenie 6 *Najskôr a):*

a) $(2,2)$*: ak* $2 \in Z_4 \Rightarrow r(2) = 2$ *(*$2+2=0$*), ak* $2 \in Z_3 \Rightarrow r(2) = 3$ $(2+2+2=0)$. $\Rightarrow$

$$r(2,2) = 6;$$

$(2,5)$*:* $r(2) = 2$ *a* $r(5) = 6 \Rightarrow$

$$r(2,5) = 6;$$

Pretože $(2,3) + (2,3) = (0,0) \Rightarrow$

$$r(2,3) = 2.$$

b) Delitele nuly: $(a,b), (c,d) \in Z_4 \times Z_6 \backslash \{(0,0)\}$ *s vlatnosťou* $(ac, bd) = (0,0)$. *Nech* $a \neq 0$ *a* $b \neq 0 \Rightarrow$

$$(a,0) \cdot (0,b) = (0,0)$$

$\Rightarrow$ *prvky množiny dvojíc* $\{((a,0),(0,b)); a, b \neq 0\}$ *sú delitele nuly v okruhu* $Z_4 \times Z_6$.
Pretoze $2 \cdot 2 = 0$ *v* Z_4 *a* $2 \cdot 3 = 0$ *v* Z_6, $\Rightarrow$ *v* $Z_4 \times Z_6$*:* $(2,2) \cdot (2,3) = (2,0) \cdot (2,0) = (0,2) \cdot (0,3) = (0,0) \Rightarrow$

$$((2,2),(2,3)), ((2,0),(2,0)), ((0,2),(0,3))$$

sú delitele nuly v okruhu $Z_4 \times Z_6$.
Delitele nuly:

$$\{((a,0),(0,b)); a, b \neq 0\} \cup \{((2,2),(2,3)), ((2,0),(2,0)), ((0,2),(0,3))\}.$$

Príklad 7 *Nech* $(G, *, e)$ *je grupa a* S *je podgrupa* G. *Ukážte, že relácia* $\alpha = \{(a,b) \in G \times G; a * b^{-1} \in S\}$ *je reláciou ekvivalenie. Čo musí spĺňať, aby sa jednalo o kongruenciu?*

Riešenie 7 *Nech* $\alpha = \{(a,b) \in M^2; a * b^{-1} \in S\} \Rightarrow$
Reflexívnosť: $a * a^{-1} = e \in S \Rightarrow (a,a) \in \alpha$.
Tranzitívnosť: $(a,b), (b,c) \in \alpha \Rightarrow a * b^{-1}, b * c^{-1} \in \alpha \Rightarrow (a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) \in \alpha$. *Ale*

$$(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) = a * c^{-1}$$

$\Rightarrow (a,c) \in \alpha$.
Symetria: Ak $(a,b) \in \alpha \Rightarrow a * b^{-1} \in S \Rightarrow (a * b^{-1})^{-1} \in S$. *Ale*

$$(a * b^{-1})^{-1} = b * a^{-1}$$

$\Rightarrow (b,a) \in \alpha$.
Kongruencia: Nech $\mathcal{G} = G/\alpha$ *–* $\mathcal{G}$ *je disjuktný rozklad množiny* G *generovaný reláciou* α. α *je kongruencia, ak* $\forall A, B \in \mathcal{G}$ $A \circ B = \{a * b; a \in A \ \& \ b \in B\} \in \mathcal{G}$ *t.z., že* $\circ$ *je binárna operácia na* $\mathcal{G}$.
Resp. $(a,b), (c,d) \in \alpha \Rightarrow (a * c, b * d) \in \alpha$.