Algebraické štruktúry — 29.5.2017

Príklad 1 *Nech* $X = \{a, b, c\}$ *a* $FG(X)$ *je voľná grupa generovaná množinou* X.
a) Nájdite redukované slovo k slovu $w = aaa^{-1}bb^{-2}ba^{-1}c^3a^3bb^{-1}a^{-3}$
b) Máme $(Z_4, +)$ *a* $h : X \to Z_4$*:* $h(a) = 1$,$h(b) = 2$,$h(c) = 3$. *Ak* ϕ *je homomorfizmus definovaný* $\phi(u) = h(u)$, *pre* $u \in X$, *zistite čomu sa rovná* $\phi(a^2bcb^{-1}ac^3)$.
c) Nájdite aspoň dva prvky z jadra $Ker(\phi)$.
d) Zistite či množina $S = \{u \in FG(X) : \phi(u) = 0\}$ *je podgrupa grupy* $FG(X)$

Riešenie 1 *a)*

$$\begin{aligned} w =& aaa^{-1}bb^{-2}ba^{-1}c^3a^3bb^{-1}a^{-3} \\ =& (a(aa^{-1})(bb^{-2}b)a^{-1})c^3(a^3(bb^{-1})a^{-3}) \\ =& c^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \phi(a^2bc^2b^{-1}ac^3) =& 2\phi(a) + \phi(b) + \phi(c) - \phi(b) + \phi(a) + 3\phi(c) \\ =& 2 + 2 + 1 - 2 + 1 + 4 = 3 \end{aligned}$$

c) $bc, a^5 \in Ker(\phi)$.
d) Binána operácia: $u \star v = uv$ *– reťazenie je asociaívna a:*
ak $u, v \in S$, *potom* $\phi(u) = \phi(v) = 0$ *a* $\phi(uv) = \phi(u) + \phi(v) = 0$. *Analogicky* $\phi(vu) = 0$. *Teda, ak* $u, v \in S$, *potom* $uv, vu \in S$
Neutrálny prvok: ak e *je prázdne slovo v* $FG(X)$ *(*$ue = ue = u$, *pre každé* $u \in FG(X)$, *tak* $\phi(u) = \phi(eu) = \phi(e) + \phi(u)$. $\Rightarrow \phi(e) = 0 \ \Rightarrow e \in S$. *Inverzný prvok: ak* $u \in S$, *potom* $\phi(u) = 0 \ \Rightarrow -\phi(u) = 0 \ \Rightarrow \phi(u^{-1}) = 0 \ \Rightarrow u^{-1} \in S$.
S je podgrupa grupy $FG(X)$.

Príklad 2 *Zistite či* $(Z_5 \times Z_4, \oplus, \circ)$ *je okruh s jednotkou, ak* $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$, $(a, b) \circ (c, d) = (a.c, b.d)$. *Nájdite delitele nuly, ak existujú.*

Riešenie 2 $(Z_5 \times Z_4, \oplus)$ *je abelova grupa:*
Asociativita platí, pretože platí v každej súradnici

$$\begin{aligned} ((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (x, y) =& ((a + c) + x, (b + d) + y) \\ =& (a + (c + x), b + (d + y)) \\ =& (a, b) \oplus ((c, d)) \oplus (x, y)) \end{aligned}$$

neutrálny prvok je $(0, 0)$,
inverzný prvok k prvku (a, b) *je* $(-a, -b)$.
komutativita: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \oplus (a, b)$
$(Z_5 \times Z_4, \circ)$ *je pologrupa s jednotkou (monoid):*
$\circ$ *je bin. op. na* $Z_5 \times Z_4$*:* $(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d) \in Z_5 \times Z_4$
je asociatívna, takže $(Z_5 \times Z_4, \oplus, \circ)$ *je okruh.*
Pretože $(1, 1) \circ (a, b) = (a, b)$ *a bin. op.* $\circ$ *je komutatívna, potom* $(1, 1)$ *je neutrálny prvok vzhľadom na* $\circ$. *Teda ide o okruh s jednotkou.*
delitel nuly:
$(a, 0).(0, b) = (0, 0)$, *pre* $\forall a \in Z_5 \backslash \{0\}$, $\forall b \in Z_4 \backslash \{0\}$,
$(0, 2) \circ (x, 2) = (0, 0)$, $\forall x \in Z_5$

Príklad 3 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *a* f_i *sú cyklické permutácie:*
$f_1 = (1, 2, 3, 4), f_2 = (4, 5, 6), f_3 = (6, 7, 8)$
a) Nájdite rád permutácie $g = f_1 f_3$.
b) Pre ktoré i, j *platí* $f_i f_j = f_j f_i$ *a pre ktoré* $f_i f_j \neq f_j f_i$*?*

Riešenie 3 *a) Nájdite rád permutácie* $g = f_1 f_3$ $(r(g) = ?)$.
$r(f_1) = 4$, $r(f_3) = 3$, *permutácie sú disjuktné* $\quad \Rightarrow \quad r(g) = r(f_1 f_3) = 12.$
b) Pre ktoré i, j $i \neq j$ *platí* $f_i f_j = f_j f_i$*?*
Pretože f_1, f_3 *sú disjuktné, tak* $f_1 f_3 = f_3 f_1$.
Pretože f_1, f_2 *a* f_2, f_3 *nie sú disjuktné, tak* $f_2 f_3 \neq f_3 f_2$ *a* $f_2 f_1 \neq f_1 f_2$.

Príklad 4 *Máme grupu* $(Z_{12}, +, 0)$.
a) Nájdite všetky jej podgrupy a označte takú cyklickú podgrupu, ktorej generátor má rád 6. *Načrtnite Hasseho diagram (usporiadanie inklúziou). Je to modulárny zväz?*
b) Nech S *je podgrupa* Z_{12} *s vlastnosťou, že* $|S| = 4$. *Nájdite* Z_{12}/S.

Riešenie 4 *Zväz:*
z obrázku vidno jednoznačné supréma a infíma

Nech $S \subseteq G$ *a* $G(S)$ *najmenšia podgrupu obsahujúca* S. *Potom*

$$G_i \vee G_j = G(G_i \cup G_j)$$

$$G_i \wedge G_j = G(G_i \cap G_j)$$

a) Podgrupy:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_{12} = Z_{12} & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
G_6 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} & & & & G_4 = \{0, 3, 6, 9\} \\
 & \uparrow & & \nwarrow \uparrow & \\
 & G_3 = \{0, 4, 8\} & & G_2 = \{0, 6\} & \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & G_1 = \{0\} & &
\end{array}$$

$r(G_6) = 6$.
Modularita: ak $x \leqslant z$ *potom* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.
Stačilo: Je to modulárny zväz - neobsahuje N_5 *(obrázok na poslednej strane).*
Dôsledné dokazovanie:
Ak L je zväz, tak pre reťazec modulatita platí vždy:
$a \leqslant b \leqslant c \quad \Rightarrow \quad a \vee (b \wedge c) = b, \quad (a \vee b) \wedge c = b.$
$b \vee (a \wedge c) = b$ *a* $(b \vee a) \wedge c = b$, *()*
Neporovnateľné sú G_3, G_2, G_3, G_4 *a* G_4, G_6.
Napríklad: G_3, G_2 *a* $G_3 \leqslant G_6$*:*
$G_3 \vee (G_2 \wedge G_6) = G_3 \vee G_2 = G_6$ *a* $(G_3 \vee G_2) \wedge G_6 = G_6 \cdots$.

b) $S = G_4, \quad Z_{12}/S = \{\{0, 3, 6, 9, \}, \{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8, 11\}\}$

Príklad 5 *Nech $(G, *, e)$ je grupa, $S \subseteq G$ je jej podgrupa. Zistite, či relácia $\alpha = \{(a, b) \in G^2;\ a * b^{-1} \in S$ je reláciou ekvivalencie. Kedy relácia α je kongruencia?*

Riešenie 5 *Nech $\alpha = \{(a, b) \in M^2;\ a * b^{-1} \in S\} \Rightarrow$*
Reflexívnosť: $a * a^{-1} = e \in S \Rightarrow (a, a) \in \alpha$.
Tranzitívnosť: $(a, b), (b, c) \in \alpha \Rightarrow a * b^{-1}, b * c^{-1} \in \alpha \Rightarrow (a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) \in \alpha$. Ale

$$(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) = a * c^{-1}$$

$\Rightarrow (a, c) \in \alpha$.
Symetria: Ak $(a, b) \in \alpha \Rightarrow a * b^{-1} \in S \Rightarrow (a * b^{-1})^{-1} \in S$. Ale

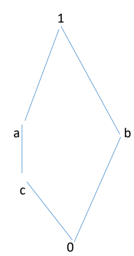
$$(a * b^{-1})^{-1} = b * a^{-1}$$

$\Rightarrow (b, a) \in \alpha$.
Kongruencia: Nech $\mathcal{G} = G/\alpha$ – $\mathcal{G}$ je disjuktný rozklad množiny G generovaný reláciou α. α je kongruencia, ak $\forall A, B \in \mathcal{G}\ A \circ B = \{a * b;\ a \in A\ \&\ b \in B\} \in \mathcal{G}$ t.z., že $\circ$ je binárna operácia na $\mathcal{G}$.

Resp. $(a, b), (c, d) \in \alpha \Rightarrow (a * c, b * d) \in \alpha$.

(stačí aj: ak je podgrupa S normálna podgrupa, tak α je kongruencia)

N_5



N5