

Príklad 1 Nech $X = \{a, b, c\}$ a $FG(X)$ je voľná grupa generovaná množinou X .

a) Nájdite redukované slovo k slovu $w = aaa^{-1}bb^{-2}ba^{-1}c^3a^3bb^{-1}a^{-3}$

b) Máme $(Z_4, +)$ a $h : X \rightarrow Z_4$: $h(a) = 1, h(b) = 2, h(c) = 3$. Ak ϕ je homomorfizmus definovaný $\phi(u) = h(u)$, pre $u \in X$, zistite čomu sa rovná $\phi(a^2bcb^{-1}ac^3)$.

c) Nájdite aspoň dva prvky z jadra $\text{Ker}(\phi)$.

d) Zistite či množina $S = \{u \in FG(X) : \phi(u) = 0\}$ je podgrupa grupy $FG(X)$

Riešenie 1 a)

$$\begin{aligned} w &= aaa^{-1}bb^{-2}ba^{-1}c^3a^3bb^{-1}a^{-3} \\ &= (a(aa^{-1})(bb^{-2}b)a^{-1})c^3(a^3(bb^{-1})a^{-3}) \\ &= c^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \phi(a^2bcb^{-1}ac^3) &= 2\phi(a) + \phi(b) + \phi(c) - \phi(b) + \phi(a) + 3\phi(c) \\ &= 2 + 2 + 3 - 2 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

c) $ac, a^4 \in \text{Ker}(\phi)$.

d) Binárna operácia: $u \star v = uv$ – reťazenie je asociatívna a:

ak $u, v \in S$, potom $\phi(u) = \phi(v) = 0$ a $\phi(uv) = \phi(u) + \phi(v) = 0$. Analogicky $\phi(vu) = 0$. Teda, ak $u, v \in S$, potom $uv, vu \in S$

Neutrálny prvok: ak e je prázdne slovo v $FG(X)$ ($ue = ue = u$, pre každé $u \in FG(X)$), tak $\phi(u) = \phi(eu) = \phi(e) + \phi(u)$. $\Rightarrow \phi(e) = 0 \Rightarrow e \in S$. Inverzný prvok: ak $u \in S$, potom $\phi(u) = 0 \Rightarrow -\phi(u) = 0 \Rightarrow \phi(u^{-1}) = 0 \Rightarrow u^{-1} \in S$.

S je podgrupa grupy $FG(X)$.

Príklad 2 Zistite či $(Z_5 \times Z_4, \oplus, \circ)$ je okruh s jednotkou, ak $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$, $(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$. Nájdite delitele nuly, ak existujú.

Riešenie 2 $(Z_5 \times Z_4, \oplus)$ je abelova grupa:

Asociativita platí, pretože platí v každej súradnici

$$\begin{aligned} ((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (x, y) &= ((a+c) + x, (b+d) + y) \\ &= (a + (c+x), b + (d+y)) \\ &= (a, b) \oplus ((c, d) \oplus (x, y)) \end{aligned}$$

neutrálny prvok je $(0, 0)$,

inverzný prvok k prvku (a, b) je $(-a, -b)$.

komutativita: $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c, d) \oplus (a, b)$

$(Z_5 \times Z_4, \circ)$ je pologrupa s jednotkou (monoid):

$\circ$ je bin. op. na $Z_5 \times Z_4$: $(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d) \in Z_5 \times Z_4$

je asociatívna, takže $(Z_5 \times Z_4, \oplus, \circ)$ je okruh.

Pretože $(1, 1) \circ (a, b) = (a, b)$ a bin. op. $\circ$ je komutatívna, potom $(1, 1)$ je neutrálny prvok vzhľadom na $\circ$. Teda ide o okruh s jednotkou.

deliteľ nuly:

$(a, 0) \cdot (0, b) = (0, 0)$, pre $\forall a \in Z_5 \setminus \{0\}, \forall b \in Z_4 \setminus \{0\}$,

$(0, 2) \circ (x, 2) = (0, 0)$, $\forall x \in Z_5$

Príklad 3 Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a f_i sú cyklické permutácie:

$$f_1 = (1, 2, 3, 4), f_2 = (4, 5, 6), f_3 = (6, 7, 8)$$

a) Nájdite rád permutácie $g = f_1 f_3$.

b) Pre ktoré i, j platí $f_i f_j = f_j f_i$ a pre ktoré $f_i f_j \neq f_j f_i$?

Riešenie 3 a) Nájdite rád permutácie $g = f_1 f_3$ ($r(g) = ?$).

$$r(f_1) = 4, r(f_3) = 3, \text{ permutácie sú disjunktne } \Rightarrow r(g) = r(f_1 f_3) = 12.$$

b) Pre ktoré i, j $i \neq j$ platí $f_i f_j = f_j f_i$?

Pretože f_1, f_3 sú disjunktne, tak $f_1 f_3 = f_3 f_1$.

Pretože f_1, f_2 a f_2, f_3 nie sú disjunktne, tak $f_2 f_3 \neq f_3 f_2$ a $f_2 f_1 \neq f_1 f_2$.

Príklad 4 Máme grupu $(Z_{12}, +, 0)$.

a) Nájdite všetky jej podgrupy a označte takú cyklickú podgrupu, ktorej generátor má rád 6. Načrtnite Hasseho diagram (usporiadanie inklúziou). Je to modulárny zväz?

b) Nech S je podgrupa Z_{12} s vlastnosťou, že $|S| = 4$. Nájdite Z_{12}/S .

Riešenie 4 Zväz:

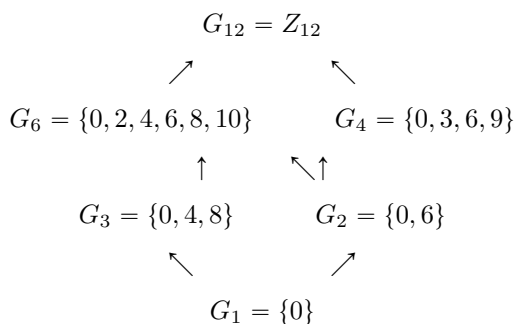
z obrázku vidno jednoznačné supréma a infíma

Nech $S \subseteq G$ a $G(S)$ najmenšia podgrupu obsahujúca S . Potom

$$G_i \vee G_j = G(G_i \cup G_j)$$

$$G_i \wedge G_j = G(G_i \cap G_j)$$

a) Podgrupy:



$$r(G_6) = 6.$$

Modularita: ak $x \leq z$ potom $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Stačilo: Je to modulárny zväz - neobsahuje N_5 (obrázok na poslednej strane).

Dôsledné dokazovanie:

Ak L je zväz, tak pre reťazec modularita platí vždy:

$$a \leq b \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = b, (a \vee b) \wedge c = b.$$

$$b \vee (a \wedge c) = b \text{ a } (b \vee a) \wedge c = b, ()$$

Neporovnateľné sú G_3, G_2, G_3, G_4 a G_4, G_6 .

Napríklad: G_3, G_2 a $G_3 \leq G_6$:

$$G_3 \vee (G_2 \wedge G_6) = G_3 \vee G_2 = G_6 \text{ a } (G_3 \vee G_2) \wedge G_6 = G_6 \dots$$

$$b) S = G_4, \quad Z_{12}/S = \{\{0, 3, 6, 9\}, \{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8, 11\}\}$$

Príklad 5 Nech $(G, *, e)$ je grupa, $S \subseteq G$ je jej podgrupa. Zistite, či relácia $\alpha = \{(a, b) \in G^2; a * b^{-1} \in S\}$ je reláciou ekvivalencie. Kedy relácia α je kongruencia?

Riešenie 5 Nech $\alpha = \{(a, b) \in M^2; a * b^{-1} \in S\} \Rightarrow$

Reflexívnosť: $a * a^{-1} = e \in S \Rightarrow (a, a) \in \alpha$.

Tranzitívnosť: $(a, b), (b, c) \in \alpha \Rightarrow a * b^{-1}, b * c^{-1} \in S \Rightarrow (a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) \in S$. Ale

$$(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) = a * c^{-1}$$

$\Rightarrow (a, c) \in \alpha$.

Symetria: Ak $(a, b) \in \alpha \Rightarrow a * b^{-1} \in S \Rightarrow (a * b^{-1})^{-1} \in S$. Ale

$$(a * b^{-1})^{-1} = b * a^{-1}$$

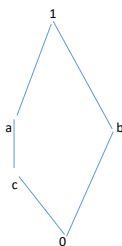
$\Rightarrow (b, a) \in \alpha$.

Kongruencia: Nech $\mathcal{G} = G/\alpha$ – $\mathcal{G}$ je disjunktný rozklad množiny G generovaný reláciou α . α je kongruencia, ak $\forall A, B \in \mathcal{G} \ A \circ B = \{a * b; a \in A \ \& \ b \in B\} \in \mathcal{G}$ t.z., že $\circ$ je binárna operácia na $\mathcal{G}$.

Resp. $(a, b), (c, d) \in \alpha \Rightarrow (a * c, b * d) \in \alpha$.

(stačí aj: ak je podgrupa S normálna podgrupa, tak α je kongruencia)

Obr. 1: N5



N5