Príklady

Cvičenie 1 *V krúžku je 20 študentov, ktorí sa zúčastnili skúšky z predmetu XX. Hodnotenie každého z nich je prvok z množiny* $H = \{A, B, C, D, E, FX\}$*. Označme množinu študentov* S*.*
a) Môže byť zobrazenie $f : S \to H$*, ktoré študentovi priradí hodnotenie môže byť injektívne alebo surjektívne?*
b) Je zobrazenie $g : S \to H$*, ktoré študentovi priradí jeho hodnotenie injektívne alebo surjektívne, ak zoberieme do úvahy výsledky zo skúšky z predmetu XX uvedené v Tab. 1?*
c) Aký je rozdiel medzi zobrazeniami f *a* g*?*
d) Existuje zobrazenie $h : H \to S$*, ktoré je injektívne alebo surjektívne?*

H (známka)	A	B	C	D	E	FX
počet študentov	1	0	10	5	3	1

Table 1: Výsledky z XX (Cv. 1)

Cvičenie 2 *Nech* $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *a zobrazenie* $f : M \to M$ *je dané predpisom* $f(x) = |x|$*. Nájdite injektívne zobrazenie* $g : f(M) \to 2^M$*.*

Cvičenie 3 *Nech* Z *je množina celých čísel a zobrazenie* $f : Z \to N \cup \{0\}$ *je dané predpisom:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 0 \\ \\ 2^{-x} - 1 & x < 0. \end{cases}$$

Zistite či zobrazenie f *je injektívne. Ak* $f(Z) \subset N \cup \{0\}$*, potom nájdite aspoň 3 prirodzené čísla, ktoré nepatria do* $N \cup \{0\}$*.*

Cvičenie 4 *Dokážte, že ak* $|A| = n < \infty$*, potom zobrazenie* $f : A \to B$ *je injektívne práve vtedy, ak* $|f(A)| = n$*.*

Cvičenie 5 *Dokážte, že ak* $|A| = |B| = n < \infty$*, potom zobrazenie* $f : A \to B$ *je injektívne práve vtedy, ak je surjektívne. Porovnajte s tvrdením v Cv. 4.*

Cvičenie 6 *Rozdeľme množinu* N *na dve disjuktné množiny:* $N = N_n \cup N_p$*, kde*

$$N_p = \{x \in N;\ x \text{ je párne }\}, \qquad N_n = \{x \in N;\ x \text{ je nepárne }\}.$$

Ukážte, že nasledujúce zobrazenia sú bijekcie:

1. $f : N \to I$ *je dané predpisom:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in N_p \\ \frac{1-x}{2} & x \in N_n. \end{cases}$$

2. $g : N_p \to N$ *je dané predpisom:* $g(x) = \frac{x}{2}$.
3. $h : N \to N_p$ *je dané predpisom:* $h(x) = 2x$.
4. $w : N \to N_n$ *je dané predpisom:* $w(x) = 2x - 1$.

Cvičenie 7 *Zistite či zobrazenie* $f : [0, \infty) \to (0,\ 1)$ *dané predpisom:*

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

je bijekcia.

Cvičenie 8 *Zistite či zobrazenie* $f : R \to (-1,\ 1)$ *dané predpisom:*

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

je bijekcia.

Cvičenie 9 $M = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* $\beta = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 4)\}$, $\gamma = \{(1, 1), (3, 1), (3, 4)\}$. *Nájdite* $\beta\gamma$, $\gamma\gamma$, $\beta\beta$, $\gamma\beta$.

Cvičenie 10 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4\}$ *a nech* $\beta = \{(a, b);\ a - 1 = b\}$. *Nájdite* β^{-1}, $\overline{\beta}$, $\beta\beta$, $\beta^{-1}\beta^{-1}$, $\beta^{-1}\beta$ *a* $\beta\beta^{-1}$.

Cvičenie 11 *Nech* $M = \{1,2,3,4\}$ *a nech* $\beta_1 = \{(a,b);\, a < b\}$ *a* $\beta_2 = \{(a,b);\, a+1 = b\}$. *Nájdite* $\beta_1\beta_2$ *a* $\beta_2\beta_1$.

Cvičenie 12 *Nech* $M = \{1,2,3,4\}$ *a nech* $\beta_1 = \{(a,b);\, a-1 = b\}$ *a* $\beta_2 = \{(a,b);\, a+1 = b\}$. *Nájdite* $\beta_1\beta_2$ *a* $\beta_2\beta_1$.

Cvičenie 13 *Nech* $M = \{1,2,3,4\}$ *a* $\beta = \{(1,2),(1,4)\}$. *Nájdite reláciu ekvivalencie* γ *s vlastnosťou* $\beta \subset \gamma$ *a nájdite* M/γ.

Cvičenie 14 *Nech* $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ *a* β *je relácia na* M *daná predpisom:* $(a,b) \in \beta$ *ak* a,b *sú prvočísla. Nájdite reláciu ekvivalencie* γ *s vlastnosťou, že* $\beta \subset \gamma$ *a* M/γ.

Riešenie Cv. 14. Riešenie nie je jednoznačné.

Cvičenie 15 *Nech* $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ *a* β *je relácia ekvivalencie na* M *daná predpisom:* $(a,b) \in \beta$ *ak* a,b *sú prvočísla, alebo* $a = b$. *Nájdite* M/β.

Príklad 1 *Typickým príkladom je množina reálnych čísel* R *s jej prirodzeným usporiadaním "*$\leqslant$*". Nech relácia* $\beta \subset R^2$ *definovaná*

$$\beta = \left\{(r_1,r_2) \in R^2;\, r_1 \leqslant r_2\right\}.$$

β *je reláciou usporiadania a* $r_1\beta r_2$, *ak* $r_1 \leqslant r_2$. *Ak* $r,s \in R$, *tak*

$$\{(r,s),(s,r)\} \cap \beta \neq \emptyset$$

a $\{(r,s),(s,r)\} \cap \beta = \{(r,s),(s,r)\}$ *práve vtedy, ak* $r = s$. ∎

Príklad 2 *Niekoľko príkladov čiastočného a úplneho usporiadania:*

1. *Nech* $M = \{a,b,c,d\}$ *a* $\beta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b)\}$. *Ľahko overíme, že* β *je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Toto usporiadanie je len čiastočné, napríklad prvky* b *a* c *sú neporovnateľné* ($(b,c),(c,b) \notin \beta$).

2. *Nech* $M = \{\{1\},\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$ *a* $(a,b) \in \beta$ *ak* $a \subseteq b$. *Ľahko overíme, že* β *je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.*

   $$\beta = \{(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\{3\},\{3\}),(\{4\},\{4\})\}.$$

   Toto usporiadanie je len čiastočné, napríklad $\{3\}$ *a* $\{4\}$ *sú neporovnateľné. Vidíme, že dvojice* $(\{3\},\{4\}),(\{4\},\{3\}) \notin \beta$.

3. *Nech $M = N$ a $(a,b) \in \beta$, ak $a \leqslant b$. Ide o usporiadanie prirodzených čísel. Je zrejmé, že $\forall a,b \in N$ $a \leqslant b$ alebo $b \leqslant a$.* ∎

Cvičenie 16 *Nech $M = \{n \in N; \frac{24}{n} \in N\}$ relácia β je daná predpisom: $(a,b) \in \beta$ ak $\frac{b}{a} \in M$. Je relácia β reláciou usporiadania?*

Cvičenie 17 *Nech $M = \{1,2,3,4\}$ a $\beta = \{(1,2),(1,4)\}$. Nájdite reláciu ekvivalencie γ s vlastnosťou $\beta \subset \gamma$ a nájdite M/γ.*

Príklad 3 *Reálna funkcia $f : R^2 \to R$ je tiež binárna operácia na množine, pretože dvom prvkom z R priraďuje prvok z R. Ak definičný obor reálnej funkcie o dvoch premenných f je vlastnou podmnožinou R^2, potom máme čiastočnú binárnu operáciu na R.* ∎

Niekoľko príkladov totálnych a čiastočných binárnych operácií:

Cvičenie 18 *Zistite ktoré z nasledujúcich binárnych operácii sú čiastočné a ktoré totálne:*

1. *Nech $M = \{2^k; k = 1,2,3,4\}$ a $f(x,y) = x.y$, kde operácia "." je normálne násobenie.*

2. *Nech $M = N$ a $f(x,y) = \frac{x}{y} \in N$.*

3. *Nech $M = N$ a $f(x,y) = x + y$, kde "+" znamená normálny súčet.*

4. *Nech $M = R$ a $f(x,y) = \frac{x}{y}$.*

5. *Nech $X = \{1,2,3\}$ a $M = 2^X$. Nech $f(a,b) = a \cup b$, pre $a,b \in M$.* ∎

Cvičenie 19 *Uvažujme $M \subseteq R$. Zistite či binárne operácie sú asociatívne, komutatívne a nádite neutrálny prvok a inverzný prvok ak exististujú.*

1. *Nech $M = R$ a $a * b = a + b$, kde "+" je normálna operácia sčítania na množine reálnych čísel.*

2. *Nech $M = R$ a $a * b = a \cdot b$, kde "$\cdot$" je normálna operácia násobenia na R.*

3. *Nech $M = N$ (množina prirodzených čísel) a $a * b = a + b$, kde "+" je operácia sčítania na množine N.*

4. *Nech $M = N$ (množina prirodzených čísel) a $a * b = a \cdot b$, kde "$\cdot$" operácia násobenia na N.*

5. *Nech I je množina celých čísel a $a * b = a + b$, kde "$+$" je normálna operácia sčítania na I.*

6. *Nech I je množina celých čísel a $a*b = a \cdot b$ a "$\cdot$" je operácia násobenia na I.*

7. *Nech $M = R$ a $a * b = a + 2b$.*

Cvičenie 20 *Zistite, či nasledujúce binárne operácie na R sú komutatívne, asociatívne, či existujú e_P, e_L, e a inverzné prvky:*
a) $a * b = \frac{a}{1+|b|}$;
b) $a * b = a + b + 1$;
c) $a * b = \min(\{a, b\})$, *kde* $\min(\{a, b\}) = a$, *ak* $a \leqslant b$;
d) $a * b = \max(\{a, b\})$, *kde* $\max(\{a, b\}) = a$, *ak* $b \leqslant a$.

V príklade 21 sú uvedené niektoré príklady binárnych operácií a ich základné vlastnosti na potečnej množine.

Cvičenie 21 *Zistite či binárne operácie sú asociatívne, komutatívne a nádite neutrálny prvok a inverzný prvok ak exististujú. Uvažujme $M = 2^X$, pre $X \neq \emptyset$. Označme $A^c = X \backslash A$.*

1. *Nech $A * B = A \cup B$, pre $A, B \in M$. Keďže "$\cup$" je normálna operácia zjednotenia dvoch množín.*

2. *Nech $A * B = A \cap B$, pre $A, B \in M$. Keďže "$\cap$" je normálna operácia prieniku dvoch množín.*

3. *Nech $A \triangle B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$, pre $A, B \in M$.*

4. *Nech $A \bigtriangledown B = (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$, pre $A, B \in M$.*

Cvičenie 22 *Nech $X \neq \emptyset$ a $M = 2^X$. Zistite, či nasledujúce binárne operácie na M sú komutatívne, asociatívne, či existujú e_P, e_L, e a inverzné prvky:*
a)$A * B = A \cap B^c$;
b) $A * B = A \cup B^c$;
c) $A * B = A \backslash B$;
d) $A * B = A^c \cap B^c$;
e) $A * B = A^c \cup B^c$.

Poznámka 1 *Nech A, B sú matice typu $n \times k$ ($n, k \in N$). Symbolom $A \circ B$ označujeme Hadamardov súčin matíc, ktorý je definovaný predpisom:*

$$A_{n\times k} \circ B_{n\times k} = \{a_{ij}b_{ij}\}_{i=1,j=1}^{i=n,j=k}.$$

Napríklad ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

potom

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 20 \\ 15 & 36 \end{pmatrix}$$

Cvičenie 23 *Nech M je množina reálnych matíc typu 3×4 ($n\times k$). Dokážte, že pre operáciu $\circ$ (Hadamardov súčin) platia nasledujúce vlastnosti:*

- $A \circ B = B \circ A$,
- $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$,
- $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$,

kde operácia "+" je štandarný súčet matíc.

$(M_1, *), (M_2, \circ)$	zobrazenie	podmienka
morfizmus	$g : M_1 \to M_2$	$g(a * b) = g(a) \circ g(b)$
monomorfizmus	morfizmus	g je injektívne
epimorfizmus	morfizmus	g surjetívne
izomorfizmus	morfizmus	g je bijektíne

Table 2: Pomenovanie zobrazení pre množiny s binárnymi operáciami $(M_1, *)$, $(M_2, \circ)$ a zobrazením $g : M_1 \to M_2$.

V špeciálnom prípade, ak $M_1 = M_2$ a binárne operácie sa rovnajú: $\forall a, b \in M$ $a * b = a \circ b$, tak namiesto názvov z Tab 2 sa používajú pomenovania uvedené v Tab. 3. Namiesto slova morfizmus mnohí autori používajú slovo homomorfizmus.

$(M, *)$	zobrazenie	podmienka
endomorfizmus	$h : M \to M$	$h(a * b) = h(a) * h(b)$
automorfizmus	endomorfizmus	h je bijektíne

Table 3: Pomenovanie zobrazení pre množinu s binárnou operáciou $(M, *)$ a zobrazením $h : M \to M$.

Cvičenie 24 *Nech $M = R^1$ a $* = +$. Zistite, či zobrazenie h je automorfizmus, ak:*

1. $h(x) = 2x$;
2. $h(x) = x^2$;
3. $h(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

Cvičenie 25 *Nech $M = R^1$ a $* = \cdot$. Zistite, či zobrazenie h je automorfizmus, ak:*

1. $h(x) = 2x$;
2. $h(x) = x^2$;
3. $h(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

Cvičenie 26 *Nech $X \neq \emptyset$, $M = 2^X$ a $* = \cap$. Zistite, či zobrazenie $h : M \to M$ je automorfizmus, ak:*

1. $h(A) = A^c$;
2. $h(A) = A \cap B$, *kde B je pevne zvolený prvok z M;*
3. $h(A) = A \cup B$, *kde B je pevne zvolený prvok z M.*

Príklad 4 *Nech* $X = \{a, b, c, d\}$, $M_1 = 2^X$ *a* R_1 *je reláciou častočného usporiadania množinovou inklúziu. Nech* $M_2 = [0,\ 4]$ *s reláciou usporiadania reálnych čísel. Nech zobrazenie* $h : M_1 \to M_2$ *priradí každému prvku z* M_2 *jeho kardinalitu:* $h(A) = |A|$, *pre* $A \in M_1$. *Nie je ťažké vidieť, že*

$$h : (M_1, \subseteq) \to (M_2, \leqslant)$$

je morfizmus. Ak $A \subseteq B$, *potom* $|A| \leqslant |B|$. ■

Príklad 5 *Nech* $G = \{a, c, b, d\}$ *a binárna operácia* $*$ *daná v nasledujúcej tabuľke Všimnime si, že binárna oprácia* $*$ *má dva pravé neutrálne prvky*

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	c	c	a	c
d	d	d	d	d

Table 4: Bin. op. $*$ (Pr.5)

$e_{P,1} = a$ *a* $e_{P,2} = b$*:* $x * y = x \qquad y \in \{a, b\}$. ■

Príklad 6 *Počet neutráslnych prvkov v nasledujúcej tabuľke*

otázka	Odpoveď
$\exists e_1, e_2 \in G,\ e_1 \neq e_2,\ x * e_1 = x * e_2 = x,\ \forall x \in G?$	áno, Tab.4
$\exists e_1, e_2 \in G,\ e_1 \neq e_2,\ e_1 * x = e_2 * x = x,\ \forall x \in G?$	áno, transponovaná Tab.4
$\exists e_1, e_2 \in G,\ e_1 \neq e_2,\ e_1 * x = x * e_2 = x\ \forall x \in G?$	nie
$\exists e_1, e_2 \in G,\ e_1 \neq e_2,\ e_1, e_2$ sú neutrálne prvky v G?	nie

Table 5: Bin. op. $*$

Cvičenie 27 *Dokážte, že* $(N, +)$ *je pologrupa a* $(N, \cdot)$ *je monoid.*

Cvičenie 28 *Zistite či* $((Z_3 \backslash \{0\})^2, \circ)$ *je monoid, ak* $(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ *pre* $a, b, c, d \in Z_5 \backslash \{0\}$.

Cvičenie 29 *Zistite či* $(Z_5^2, \circ)$ *je monoid, ak* $(a,b)\circ(c,d) = (a\cdot c, b\cdot d)$ *pre* $a,b,c,d \in Z_5$.

Cvičenie 30 *Zistite či* $(Z_p^2, \circ)$, $p \in N$ *je monoid, ak* $(a,b)\circ(c,d) = (a\cdot c, b\cdot d)$ *pre* $a,b,c,d \in Z_p$.

Cvičenie 31 *Zistite či* $(Z_p^2, \oplus)$, $p \in N$ *je monoid, ak* $(a,b)\oplus(c,d) = (a+c, b+d)$ *pre* $a,b,c,d \in Z_p$.

Cvičenie 32 *Nech* $M = \{[t,s];\ t,s \in R^1)$ *a* $[t_1,s_1]\oplus[t_2,s_2] = [t_1+t_2, s_1+s_2]$. *Zistite či* $(M, \oplus)$ *je monoid.*

Cvičenie 33 *Nech* $M = \{[t,s];\ t,s \in \{x \in R^1;\ x > 0\})$ *a* $[t_1,s_1]\circ[t_2,s_2] = [t_1\cdot t_2, s_1\cdot s_2]$. *Zistite či* $(M, \circ)$ *je monoid.*

Cvičenie 34 *Nech* M *je množina všetkých matíc* 2×2, *prvky matice sú reálne čísla a* $A+B$, $A\cdot B$ *sú obvyklé operácie súčtu a násobenia matíc. Zistite či* $(M,+)$ *a* $(M,\cdot)$ *sú komutaívne monoidy.*

Cvičenie 35 *Dokážte, že* $(N \cup \{0\}, +)$ *je monoid.*

Cvičenie 36 *Zistite či* $(Z_5^2, *)$ *je monoid, ak* $(a,b)*(c,d) = (a\oplus c, b\oplus d)$ *pre* $a,b,c,d \in Z_5$.

Cvičenie 37 *Nech* $M = \{[t,s];\ t,s \in R)$ *a*

$$[t_1,s_1]\oplus[t_2,s_2] = [t_1+t_2, s_1+s_2].$$

Zistite či $(M,\oplus)$ *je monoid.*

Cvičenie 38 *Nech* $M = \{[t,s];\ t,s \in R)$ *a*

$$[t_1,s_1]\circ[t_2,s_2] = [-|t_1\cdot t_2|, |s_1\cdot s_2|].$$

Zistite či $(M,\circ)$ *je monoid.*

Cvičenie 39 *Nech* M *je množina všetkých matíc* 2×2, *prvky matice sú reálne čísla a* $A+B$, $A\cdot B$ *sú obvyklé operácie súčtu a násobenia matíc. Zistite či* $(M,+)$ *a* $(M,\cdot)$ *sú grupy.*

Príklad 7 *Nech* $M = \{a,b,c\}$. *Koľko a bijekcií môžeme zostrojiť na* M? *Vytvorime najskôr všetky možné usporiadané trojice:*

$$\{\underbrace{(a,b,c)}_{x_1}, \underbrace{(b,c,a)}_{x_2}, \underbrace{(c,a,b)}_{x_3}, \underbrace{(b,a,c)}_{x_4}, \underbrace{(a,c,b)}_{x_5}, \underbrace{(c,b,a)}_{x_6}\}$$

Postupne budeme zobrazovat prvky M *cez bijekciu* $f_i : M \to M$ *danú pomocou usporiadanej trojice* x_i $(f_i : x_1 \to x_i,\ i = 1,2,\cdots,6)$. *Je zrejme, že* $f_1 = I_M$. *Pozri Tab. 6.*

x_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
a	a	b	c	b	a	c
b	b	c	a	a	c	b
c	c	a	b	c	b	a
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

Table 6: V stĺpci x_1 sú prvky množiny M a v stĺpcoch sú obrazy bijekcií f_i.

Vypočítame $f_i \circ f_j$ pre $\forall i, j$ pomocou Tab. 6. Napríklad $f_2 \circ f_4$:

$$f_2(f_4(a)) = f_2(b) = c, \;\; f_2(f_4(b)) = f_2(a) = b, \;\; f_2(f_4(c)) = f_2(c) = a,$$

$$f_6 = f_2 \circ f_4 : a \mapsto c, \;\; b \mapsto b, \;\; c \mapsto a.$$

V Tab. 7 sú všetky $f_i \circ f_j$, $i, j = 1, \cdots, 6$. Tabuľka vykazuje symetriu. Je to spôsobené tým, ako sme zoradili jednotlive prvky x_i. $\{x_1, x_2, x_3\}$ a $\{x_4, x_5, x_6\}$ tvoria samostatné skupiny. Bijekcie vytvorili dve skupiny $\{f_1, f_2, f_3\}$ a $\{f_4, f_5, f_6\}$, pretože sme permutacie konštruovali nasledovne: zobrali sme usporiadanú trojicu $x_1 = (a, b, c)$ a cyklicky ju spermutovali: $x_2 = (b, c, a)$, $x_3 = (c, a, b)$. To iste sme urobili s trojicou $x_4 = (b, a, c)$.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Table 7: Všetky možné $f_i \circ f_j$, $i, j \in \{1, \cdots, 6\}$

Množina $\mathcal{P} = \{f_i; i = 1, \cdots, 6\}$ *s operáciou* $\circ$ *tvorí grupu, ktorá nie je komutaívna, neutrálny prvok* $e = f_1$. *Počet prvkov grupy* $(\mathcal{P}, \circ)$ *je presne toľko, koľko je možné zostrojiť usporiadaných trojíc z prvkov* a, b, c, *teda* $|\mathcal{P}| = 3! = 6$. ▪

Cvičenie 40 *Nech* $M = \{a, b, c\}$. *Zopakujte predošlý príklad (Pr.7) pre dané poradie usporiadaných trojíc:*
a) $\{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$.
b) $\{(b, c, a), (c, a, b), (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (c, b, a)\}$.
Porovnajte výsledky s Tab. 7. ▪

Príklad 8 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \}$ *a* $g : M \to M$ *nasledovne*

$$g(1) = 2,\ g(2) = 1,\ g(i) = i,\ i \notin \{1, 2\}$$

rad permutácie *je* 2, *pretože* $g \circ g = I_M$. ▪

Príklad 9 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \}$ *a* $h : M \to M$ *nasledovne*

$$h(1) = 2,\ h(2) = 3,\ h(3) = 1,\ h(i) = i,\ i \in \{1, 2, 3\}$$

rad permutácie je 3, *pretože* $h^3 = I_M$. ▪

Príklad 10 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \}$ *a* $f : M \to M$ $f = g \circ h$, *kde* g *je z Pr. 8 a* h *je z Pr. 9.*

$$\begin{array}{ll} f(1) = g(h(1)) = g(2) = 1 & f(2) = g(h(2)) = g(3) = 3 \\ f(3) = g(h(3)) = h(1) = 2 & f(i) = i,\ i \notin \{1, 2, 3\} \end{array}$$

Dostali sme (1,3,2,4,5,6). Aké je n, aby $f^n = I_M$*? Zložením sme dostali transpozíciu.* f *mení* $2\ 3$ *a ostatné necháva na mieste (Tab. 8)*

x	$f(x)$	$f^2(x)$
1	1	1
2	3	2
3	2	3
4	4	4
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	n	n

Table 8: Rád je 2, f mení 2, 3 a ostatné necháva na mieste. (Pr. 10)

Príklad 11 *Nech* $M = \{1,2,3,4,\cdots,n,\}$ *a* $u : M \to M$ $u = h \circ g$ $u(1) = h(g(1)) = h(2) = 3,$ $u(2) = h(g(2)) = h(1) = 2,$ $f(3) = h(g(3)) = h(3) = 1,$ $f(i) = i,$ $i \notin \{1,2,3\}$ *Dostali sme (3,2,1,4,5,6). Aké je n, aby* $u^n = I_M$*? Pozri (Tab. 9)*

x	$u(x)$	$u^2(x)$
1	3	1
2	2	2
3	1	3
4	4	4
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	n	n

Table 9: Rád je 2, u mení 1, 3 a ostatné necháva na mieste. (Pr. 11)

Príklad 12 *Nech* $M = \{1,2,3,4,5,6,\}$ *a* $f : M \to M$ $f = f_1 \circ f_2$*, kde* f_1 *nemení prvky* $5,6$

$$f_1(1) = 2 \quad f_1(2) = 3 \quad f_1(3) = 4 \quad f_1(4) = 1$$

A f_2 *nemení* $1,2,3,4,$ *ale* $f_2(5) = 6, f_2(6) = 5.$ $f : (1,2,3,4,5,6) \to (2,3,4,1,6,5).$ f_i *a* f_2 *sú navzájom disjuktné cykly. Aké je n, aby* $f^n = I_M$*? (Tab. 10)*

$f^0 = I_M$	f	f^2	f^3	f^4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	4	3	4
5	6	5	6	5
6	5	6	5	6

Table 10: Rád $r(f) = 4$. ($r(f_1) = 4$, $r(f_2) = 2$) (Pr. 12)

Príklad 13 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *a* $g : M \to M$ $g = g_1 \circ g_2$, *kde* g_1 *nemení prvky* $4, 5, 6$ *a* g_2 *nemení* $1, 2, 3, 4$,

$$g_1(1) = 2, \quad g_1(2) = 3, \quad g_1(3), = 4 \quad g_2(5) = 6, \quad g_2(6) = 5$$

$g : (1, 2, 3, 4, 5, 6) \to (2, 3, 1, 4, 6, 5)$. *$g_1$ a g_2 sú navzájom disjuktné cykly. Aké je n, aby $g^n = I_M$? (Pozri Tab. 11)*

I_M	g	g^2	g^3	g^4	g^5	g^6
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
4	4	4	4	4	4	4
5	6	5	6	5	6	5
6	5	6	5	6	5	6

Table 11: Rád $r(g) = 6$. ($r(g_1) = 3$, $r(g_2) = 2$) (Pr. 13)

Cvičenie 41 *Nech* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *a* $f : M \to M$ *je permutácia definovaná v Tab. 12*

M	1	2	3	4	5	6	7	8
f	1	5	6	3	2	4	8	7

Table 12: Cv. 41

a) Nájdite všetky uzavreté cykly tejto permutácie.
b) Nájdite také k*, aby platilo* $f^k = I_M$ *a overte.*
c) Ukážte, že množina $G = \{f^i; \, i = 0, 1, 2, \cdots, k-1\}$ *s operáciou skladania bijekcií je grupa a je izomorfná s grupou* $(Z_k, +)$.

Cvičenie 42 *Nech* $p \in N$. *Dokážte, že*
a) $(Z_p, \oplus, 0)$ *je Abelova grupa pre každé* p;
b) $(Z_p \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ *je grupa práve vtedy, ak* p *je prvočíslo.*

Cvičenie 43 *Zistite či* $((Z_5 \backslash \{0\})^2, \circ, 1)$ *je Abelova grupa, ak* $(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ *pre* $a, b, c, d \in Z_5 \backslash \{0\}$.

Cvičenie 44 *Zistite či* $(Z_5^2, \circ, 1)$ *je Abelova grupa, ak* $(a, b) \circ (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ *pre* $a, b, c, d \in Z_5$.

Cvičenie 45 *Nech* $M = \{[t, s]; \, t, s \in R^1)$ *a* $[t_1, s_1] \oplus [t_2, s_2] = [t_1 + t_2, s_1 + s_2]$. *Zistite či* $(M, \oplus, [0, 0])$ *je Abelova grupa.*

Cvičenie 46 *Nech* $M = \{[t, s]; \, t, s \in \{x \in R^1; \, x > 0\})$ *a* $[t_1, s_1] \circ [t_2, s_2] = [t_1 \cdot t_2, s_1 \cdot s_2]$. *Zistite či* $(M, \circ, [1, 1])$ *je Abelova grupa.*

Cvičenie 47 *Nech* $(M, *, e)$ *je grupa a binárna operácia je* $\ominus$ *definovaná vzťahom* $a \ominus b = a * b^{-1})$. *Dokážte že:*

1. $a \ominus e = a$ *(*$e = e_P$*);*

2. $e \ominus a = a^{-1}$.

3. $a \ominus a^{-1} = a^2$;

4. $a^{-1} \ominus a = a^{-2}$;

Cvičenie 48 . *Nech $(M, *, e)$ je grupa a binárna operácia je $\ominus$ definovaná vzťahom $a \ominus b = a * b^{-1}$. Nájdite podmienky, kedy neutrálny prvok e grupy $(M, *)$ je neutrálnym prvkom vzhľadom k operácii $\ominus$.*

Cvičenie 49 *Nájdite všetký cyklické podgrupy grupy $(M, *)$ ak*
a) $(M, *, e) = (Z_5, \oplus, 0)$;
b) $(M, *, e) = (Z_5 \backslash \{0\}, \circ, 1)$;
c) $(M, *, e) = (Z_6, \oplus, 0)$;
d) $(M, *, e) = (Z_7 \backslash \{0\}, \circ, 1)$;
e) $(M, *, e) = (Z_8, \oplus, 0)$.

Poznámka 2 *Nech $(G, *, e)$ je grupa a $S \subseteq G$ je jej podgrupa. Potom označíme*

$$Sa = \{s * a;\ s \in S\}, \quad aS = \{a * s;\ s \in S\}.$$

Teda $x \in Sa$, ak $\exists s \in S$ s vlastnosťou, že $x * a^{-1} \in S$ a analogicky $y \in aS$, ak $\exists s \in S$ s vlastnosťou, že $a^{-1} * y \in S$.

Cvičenie 50 *Nech $(G, *, e)$ je grupa a $S \subseteq G$ je jej podgrupa.*
a) Zistite, či relácia $\gamma = \{(a, b) \in G \times G;\ a * b^{-1} \in S\}$ je reláciou ekvivalencie.
b) Aké podmienky musí relácia γ splňať, aby bola kongruenciou.

Príklad 14 *Máme grupu $(Z_{10}, \oplus, 0)$. Nech $S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. S je podgrupa grupy $(Z_{10}, \oplus, 0)$. Teda*

$$S1 = S3 = S5 = S7 = S9 = A, \quad S0 = S2 = S4 = S6 = S8 = S$$

a $S \cup A = Z_{10}$. (Pozri Tab. 13.)

	$S0$	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	$S5$	$S6$	$S7$	$S8$	$S9$
S/Z_{10}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7

Table 13: Sa, $a \in Z_{10}$ (Pr. 14)

Nech $G_1 = Z_{10}/S$. *Potom* $(G_1, \oplus, S) \cong (Z_2, \oplus, 0)$, *kde* $X \oplus Y = a \oplus b$ *ak* $a \in X$, $b \in Y$ *a* $X, Y \in G_1$.

$\oplus$	S	A
S	S	A
A	A	S

Cvičenie 51 *Rozložte grupu* $(Z_{15}, +, 0)$ *podľa* $S = \{0, 5, 10\}$.