

PODGRUPY A CYKLICKÉ GRUPY

Pojmy

Podgrupa

Ak $(G, \circ)$ je grupa, potom $(H, \circ)$ je podgrupou $(G, \circ)$, ak $H \subseteq G$ a $(H, \circ)$ je grupa.

Prakticky, ak vieme, že $(G, \circ)$ je grupa a H je podmnožina G , stačí overiť dve skutočnosti:

1. $\circ$ je operácia na H (tj. uzavretosť H vzhľadom na operáciu)
2. pre každé $x \in H$ aj $x^{-1} \in H$ (tj. uzavretosť H vzhľadom na inverziu)

Ostatné vlastnosti (asociatívnosť, neutrálny prvok) sa zúžením G na H "nepokazia".

Ak je H konečná množina, stačí overiť podmienku 1.

Poznámka: Grupa a podgrupa sa môžu označovať zjednodušene iba názvom množiny, napr. G a H , bez uvedenia operácie, pokiaľ je zrejmé, "s akou operáciou aktuálne pracujeme".

Cyklická grupa

Grupa $(G, \circ)$ sa nazýva cyklická, ak všetky jej prvky vieme generovať jedným prvkom – tzv. generátorom. To znamená, že prvky grupy vieme zapísať takto:

e (neutrálny), x (generátor), $x^2 = x \circ x$, $x^3 = x \circ x \circ x$, ..., $x^{n-1} = x \circ x \circ \dots \circ x$

Generovanie sa končí pri takom čísle n , pre ktoré $x^n = e$, tj. sa to "zacyklí". Číslo n je rád cyklickej grupy, a zároveň rád prvku x . V širšom zmysle rád cyklickej grupy môže byť aj nekonečný.

Niektoré prvky grupy môžu mať aj nižší rád. Pokiaľ n nie je prvočíslo, v cyklickej grupe sú prítomné prvky s rádom rovným niektorému z deliteľov n . Tie generujú podgrupy G .

Grupa môže mať viac ako jeden generátor.¹ Dokonca ak n je prvočíslo, tak každý prvok grupy okrem e je jej generátorom.

Archetypálnym príkladom cyklickej grupy rádu n je $(\mathbb{Z}_n, +)$. Každá (!!!) iná cyklická grupa rádu n sa s ňou štrukturálne zhoduje. Odborne povedané, všetky cyklické grupy rádu n sú izomorfné so $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Ďalšie poznatky (vysvetlenie v prednáškach, alebo dokážte svojpomocne, nie je to ťažké) :

Každá grupa s prvočíselným počtom prvkov je cyklická a nemá netriviálne podgrupy.

Každá podgrupa cyklickej grupy je cyklická.

Cyklická grupa je komutatívna.

¹ V tejto téme sa generátorom rozumie vždy prvok, ktorý generuje celú grupu G . Viac generátorov znamená viac prvkov, schopných generovať tú istú celú grupu. Uvedenú situáciu treba odlišovať od všeobecnejších situácií (spomenuté napr. pri téme podgrupy), keď je grupa generovaná dvoj alebo viacprvkovou množinou (celá n -tica je tým generátorom, nie jednotlivé prvky samostatne).

Riešené príklady

Príklad 1

Je daná grupa $(\mathbb{Z}, +)$, tj. celé čísla s operáciou $+$.

a) Overte, či $(H, +)$, kde $H = 2\mathbb{Z}$ (párne celé čísla), je podgrupou $(\mathbb{Z}, +)$.

b) Overte, či $(H, +)$, kde $H = \mathbb{N}$ (prirodzené čísla), je podgrupou $(\mathbb{Z}, +)$.

Riešenie

a) $H = 2\mathbb{Z}$ je podmnožinou $\mathbb{Z}$. Overíme podmienky 1 a 2.

1. súčet dvoch párných čísel je zase párne číslo ✓

2. ak x je párne, inverzný "kamarát" pri operácii $+$ bude $(-x)$, čo je opäť párne číslo. ✓

Podmienky 1. a 2. sú splnené, $(H, +)$ je podgrupou $(\mathbb{Z}, +)$.

b) $H = \mathbb{N}$ je podmnožinou $\mathbb{Z}$.

1. súčet dvoch prirodzených čísel je prirodzené číslo ✓

2. ak x je prirodzené, inverzný "kamarát" pri operácii $+$ bude záporné $(-x)$ nepatriace do $\mathbb{N}$. ✗

Podmienka 2 nie je splnená, $(H, +)$ nie je podgrupou $(\mathbb{Z}, +)$.

Príklad 2a

Je daná grupa $(\mathbb{Z}_8, +)$, tj. čísla $0, 1, 2, \dots, 7$ s operáciou $+/_{\text{mod } 8}$.

Nech $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0, 2, 4, 6\}$. Overte, či je $(H, +)$ podgrupou $(\mathbb{Z}_8, +)$.

Riešenie

H je podmnožinou $\mathbb{Z}_8$.

Overenie podmienky 1:

$$\begin{aligned} 0+x &= x, \\ 2+2 &= 4, \quad 2+4=6, \quad 2+6=0, \\ 4+4 &= 0, \quad 4+6=2, \\ 6+6 &= 4 \end{aligned}$$

Vidíme, že súčet ľubovoľných dvoch čísel z H patrí opäť do H . ✓

Vzhľadom na komutatívnosť sme si niektoré výpočty ušetrili.

(Pri hlbšom zamyslení by sme si vyššie uvedené výpočty mohli ušetriť úplne.)

Overenie podmienky 2:

H je konečná, podmienka 2 teda platí "automaticky" (nemusí sa overovať). ✓

$(H, +)$ je podgrupou $(\mathbb{Z}_8, +)$.

Príklad 2b

Je daná grupa $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, tj. čísla $0, 1, 2, \dots, 9$ s operáciou $+/_{\text{mod } 10}$.

Nech $H = \{0, 3, 6, 9\}$. Overte, či je $(H, +)$ podgrupou $(\mathbb{Z}_{10}, +)$

Riešenie

H je podmnožinou $\mathbb{Z}_{10}$.

1. Vidno, že napr. $6+6 = 2$, $9+6 = 5$... Podmienka 1 nie je splnená. ✗

$(H, +)$ nie je podgrupou $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Poznámka k nasledujúcemu príkladu

Matice tu budeme z praktických dôvodov zapisovať ako v MatLabe, napr.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [2 \ 3 \ 7; 1 \ 3 \ 5; 1 \ 0 \ 2]$$

Príklad 3

Je daná grupa $(G, *)$ regulárnych matic 2×2 (s reálnymi zložkami) s operáciou maticového násobenia $*$ a množina $H = \{[a \ b; b \ a], a, b \in \mathbb{R}, a \neq b\}$. Overte, či platí $(H, *) \subset (G, *)$, tj. či H je podgrupou G .

Riešenie

Najprv sa ubezpečme, že $(G, *)$ je naozaj grupa. Oprieme sa o tvrdenia známe z LA.

- Súčin 2 regulárnych matic je regulárna matica.
- Maticový súčin je asociatívny.
- Neutrálny prvok je jednotková matica $[1 \ 0; 0 \ 1]$
- Regulárna matica má vždy inverznú maticu.

Pozrime sa teraz na $(H, *)$. Musíme overiť tri veci.

0. Je množina H podmnožinou G ? Platí $\det([a \ b; b \ a]) = a^2 - b^2 \neq 0$, lebo $a \neq b$.

Matice v tvare $[a \ b; b \ a]$ teda sú regulárne, množina H je podmnožinou G . ✓

1. Uzavretosť na operáciu. Vynásobíme (na papieri spravte podrobne):

$$[a \ b; b \ a] * [c \ d; d \ c] = [ac+bd \ ad+bc; ad+bc \ ac+bd]$$

Vidíme, že súčin má tvar $[x \ y; y \ x]$. Zároveň platí, že súčin dvoch regulárnych matic je regulárna matica. Otázkou ešte je, či platí $x \neq y$. Skúsme teda, či sa môže pritrafiť $x=y$, tj.

$$ac+bd=ad+bc.$$

Upravíme:

$$ac-ad=bc-bd$$

$$a(c-d)=b(c-d)$$

$$(a-b)(c-d)=0$$

Keďže $a \neq b$ a $c \neq d$, posledná rovnosť nemá byť ako splnená, súčin dvoch nenulových čísel nebude nula.

Bod 1 je teda v poriadku. ✓

2. Uzavretosť na inverziu. Vieme že inverzná matica k regulárnej matici existuje, treba sa teda len ubezpečiť, že má požadovaný tvar (tj. že sa nachádza v H).

Treba si pripomenúť, ako sa hľadá inverzná matica – tu uvedieme rovno výsledok:

$$[a \ b; b \ a]^{-1} = [-a \ b; b \ -a]/(b^2 - a^2) \quad \checkmark$$

Záver: všetky skúmané body sú potvrdené, preto platí $(H, *) \subset (G, *)$.

Príklad 4a

Je daná grupa komplexných čísel s násobením, $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$. Označme $S = \{c \in \mathbb{C}, |c| \in \mathbb{N}\}$ – ide o tie kompl. čísla, ktorých vzdialenosť od 0 je prirodzené číslo. Je $(S, *)$ podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$?

Riešenie

Overíme známe dve podmienky. Komplexné čísla budeme zapisovať v exponenciálnom tvare, tj. $c = r \cdot e^{i\omega}$, kde $r = |c|$.

1. Uzavretosť vzhľadom na operáciu.

Nech c_1 a c_2 sú z H , potom $c_1 * c_2 = r_1 \cdot e^{i\omega_1} * r_2 \cdot e^{i\omega_2} = r_1 * r_2 * e^{i\omega_1 + i\omega_2}$. Hodnoty $r_{1,2}$ sú prirodzené a súčin dvoch prirodzených čísel je prirodzené číslo, tj. $r_1 * r_2 \in \mathbb{N}$. ✓

2. Uzavretosť vzhľadom na inverziu. Napr. pre $c=3$ je inverzným prvkom $1/3$, a to je mimo S . ✗

Záver: $(S, *)$ nie je podgrupou $(\mathbb{C}, *)$

Príklad 4b

Zmeníme mierne predošlé zadanie. Označíme $S = \{c \in \mathbb{C}, |c| \in \mathbb{Q}^+\}$, teda pôjde o množinu kompl. čísel, ktorých vzdialenosť od 0 je racionálne číslo. Je $(S, *)$ podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$?

Riešenie

1. Uzavretosť vzhľadom na operáciu. $c_1 * c_2 = r_1 \cdot e^{i\omega_1} * r_2 \cdot e^{i\omega_2} = r_1 * r_2 * e^{i\omega_1 + i\omega_2}$

Súčin dvoch racionálnych čísel je racionálne číslo, $r_1 * r_2 \in \mathbb{Q}$. ✓

2. Uzavretosť vzhľadom na inverziu. Ak $c = r \cdot e^{i\omega}$, tak $c^{-1} = 1/r \cdot e^{-i\omega}$. $1/c$ je racionálne číslo. ✓

Záver: $(S, *)$ je podgrupou $(\mathbb{C}, *)$

Príklad 5a

Je daná grupa $(\mathbb{Z}_5, +)$. Určte jej generátor a nájdite všetky jej netriviálne podgrupy.

Riešenie

Daná grupa má 5 prvkov. To nie je veľa, zvládneme preskúmať generačný potenciál všetkých prvkov.

0	Prvok 0 generuje:	0, $0+0=0$, $0+0+0=0$, ... generuje len sám seba.
1	Prvok 1 generuje	1, $1+1=2$, $1+1+1=3$, $1+1+1+1=4$, $1+1+1+1+1=0$. Tu sme sa zacyklili, takže končíme. Vygenerovala sa celá grupa.
2	Prvok 2 generuje	2, $2+2=4$, $2+2+2=1$, $2+2+2+2=3$, $2+2+2+2+2=0$, a máme všetko.
3	Prvok 3 generuje	3, $3+3=1$, $3+3+3=4$, $3+3+3+3=2$, $3+3+3+3+3=0$, a máme všetko.
4	Prvok 4 generuje	4, $4+4=3$, $4+4+4=2$, $4+4+4+4=1$, $4+4+4+4+4=0$, a máme všetko.

Prvok 0 nageneroval len sám seba, tj. triviálnu (vždy existujúcu) podgrupu $(\{0\}, + \text{ mod } 5)$.

Všetky ostatné prvky nagenerovali celú grupu $(\mathbb{Z}_5, +)$, ktorá je same sebe triviálnou podgrupou.

Posledné zistenie nie je prekvapením (lebo 5 je prvočíslo), z teórie o tom vieme, ale je dobré si to aspoň raz prakticky ohmatať.

Záver: Všetky čísla okrem neutrálnej 0 sú generátory danej grupy G .

Grupa G má iba triviálne podgrupy.

Príklad 5b

Je daná grupa $(\mathbb{Z}_5, +)$. Nájdite všetky jej automorfizmy.

Riešenie

Automorfizmus je izomorfné zobrazenie grupy na seba. Izomorfizmus zachováva štruktúru a všetky kľúčové parametre, teda o.i. neutrálny prvok musí zobrazit' na neutrálny a generátor na generátor.

A sme na stope – zobrazíme generátor 1 na nejaký iný generátor grupy, a zobrazenie ostatných prvkov už dostaneme podľa poradia pri generovaní:

	neutr.	gen.	gen. ²	gen. ³	gen. ⁴
Automorfizmus 1:	0	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓	↓
	0	1	2	3	4
Automorfizmus 2:	0	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓	↓
	0	2	4	1	3
Automorfizmus 3:	0	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓	↓
	0	3	1	4	2
Automorfizmus 4:	0	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓	↓
	0	4	3	2	1

Dostali sme 4 automorfizmy. Sú to všetky možnosti alebo je ich viac?

Príklad 6

Nájdite generátor grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a všetky jej netriviálne podgrupy.

Riešenie

Odpoveď na obidve otázky vieme dať znovu tak, že postupne vyskúšame generačný potenciál všetkých jej prvkov (všetky podgrupy musia byť cyklické, takže určite ich takto nájdeme)

0 – neutrálny prvok, generuje len seba.

1, 2, 3, 4, 5, 0

2, 4, 0

3, 0

4, 2, 0

5, 4, 3, 2, 1, 0

Generátormi celej grupy sú prvky 1, 5.

Prvky 2, 4 generujú podgrupu $\{0, 2, 4\} = 2\mathbb{Z}_3$.

Prvok 3 generuje podgrupu $\{0, 3\} = 3\mathbb{Z}_2$.

Všimnime si, že inverzný k 1 je 5, inverzný k 2 je 4, a inverzný k 3 je 3. Nie je náhoda, že prvok x a jeho inverzný kolega x^{-1} generujú rovnakú množinu.

Všimnime si tiež, že celú grupu generujú prvky nesúdeliteľné s n . Naopak, čísla súdeliteľné s n generujú podgrupy. Ak $\text{NSD}(x, n) = k$, potom x a všetky násobky k generujú podgrupu s počtom prvkov n/k .

Príklad 7

Je daná grupa $(\mathbb{Z}_{10}, +)$. Nájdite všetky jej netriviálne podgrupy.

Riešenie

Príklad je podobný ako predošlý. Dovoľme si preto niektoré kroky zrýchliť, predsa len... komu sa chce vypisovať 10 riadkov...?

0 – generuje vieme čo

1, 3, 7, 9 – sú nesúdeliteľné s 10, takže generujú celú grupu.

2, 4, 6, 8 – ich NSD s 10 je 2, takže generujú $(\{0, 2, 4, 6, 8\}, +) = (2\mathbb{Z}_5, +)$

5 – $\text{NSD}(5, 10) = 5$, vygeneruje sa $(\{0, 5\}, +) = (5\mathbb{Z}_2, +)$

Zhrnutie

Získali sme dve netriviálne podgrupy, $(2\mathbb{Z}_5, +)$ a $(5\mathbb{Z}_2, +)$. Sú generované číslami súdeliteľnými s 10-kou a počet ich prvkov je deliteľ 10ky.

Pripomíname si – počet prvkov podgrupy musí byť vždy deliteľom počtu prvkov pôvodnej grupy. Ak je počet prvkov grupy prvočíslo, tá bude mať len triviálne podgrupy. Naopak, čím viac deliteľov má počet prvkov grupy, tým viac podgrúp nájdeme.

Príklad 8

Je daná grupa $(\mathbb{Z}_{16}, +)$. Nájdite všetky jej netriviálne podgrupy.

Riešenie

– 0, 2, 6, 10, 14	generujú $(2\mathbb{Z}_8, + \text{ mod } 16)$
– 0, 4, 12	generujú $(4\mathbb{Z}_4, + \text{ mod } 16)$
– 0, 8	generujú $(8\mathbb{Z}_2, + \text{ mod } 16)$

Ostatné čísla generujú triviálne podgrupy.

Príklad 9a

Je grupa $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$ cyklická? Ak áno, nájdite jej generátory a všetky jej netrivi. podgrupy.

Riešenie

S násobením to nie je tak prehľadné, vezmeme teda postup opäť od podlahy a pozrime sa, čo nám jednotlivé prvky nagerujú:

1:	1	generuje triv. podgrupu $(\{1\}, *)$
2:	2,4,3,1	generuje celú $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$
3:	3,4,2,1	generuje celú $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$
4:	4,1	generuje podgrupu $(\{1,4\}, *)$

Zhrnutie: generátory sú 2,3, jediná netriviálna podgrupa je $(\{1,4\}, *)$.

Príklad 9b

Cyklická grupa $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$ by podľa teórie mala byť izomorfná s $(\mathbb{Z}_4, +)$. Nájdite všetky izomorfizmy.

Riešenie

Izomorfizmus musí zobrazovať (o.i.) neutrálny prvok na neutrálny a generátor na (ľubovoľný) generátor. Možnosti izomorfizmu $(\mathbb{Z}_4, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$ sú teda také, aké sú možnosti zobrazenia generátora jednej grupy na generátor druhej grupy:

	neutr.	gen.	gen. ²	gen. ³
Izomorfizmus 1:	0	1	2	3
	↓	↓	↓	↓
	1	2	4	3
Izomorfizmus 2:	0	1	2	3
	↓	↓	↓	↓
	1	3	4	2

Prvok 2 (jediný generátor jedinej netrivi. podgrupy $(2\mathbb{Z}_2, +)$) sa vždy zobrazí na 4 (jediný generátor jedinej netrivi. podgrupy $(\{1,4\}, *)$)

Poznámka: Izomorfizmy sme hľadali tak, že jeden generátor (zvolilo sa číslo 1) grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ sa zobrazil na prvý a potom druhý generátor $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$. Preto sme dostali dva výsledky.

Otázkou je, prečo sme neskúšali aj druhý generátor (číslo 3) grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ zobrazit' na jeden alebo druhý generátor $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$. Nedostali by sme ďalšie dva izomorfizmy? Nie. Prečo?

Príklad 10a

Je grupa $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *)$ cyklická? Ak áno, nájdite jej generátory a všetky jej netrivi. podgrupy.

Riešenie

Prvkov nie je veľa, odskúšame preto zaradom ich generačný potenciál:

1 – neutrálny prvok, generuje len seba.

2, 4, 1

3, 2, 6, 4, 5, 1

4, 2, 1

5, 4, 6, 2, 3, 1

6, 1

Prvky 3 a 5 (navzájom sú si inverzné) generujú celú grupu, teda grupa je cyklická.

Prvky 2 a 4 (navzájom sú si inverzné) generujú podgrupu $\{1, 2, 4\}$.

Prvok 6 generuje podgrupu $\{1, 6\}$.

Príklad 10b

Ak je grupa $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *)$ cyklická a má 6 prvkov, musí byť izomorfná so $(\mathbb{Z}_6, +)$. Nájdite všetky izomorfizmy.

Riešenie

Najprv si zbežne porovnajme štruktúru a parametre oboch grúp:

	$(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *)$	$(\mathbb{Z}_6, +)$
Neutr. prvok	1	0
Generátory	3, 5	1, 5
3-prvková podgrupa	$\{1, 2, 4\}$	$\{0, 2, 4\}$
2-prvková podgrupa	$\{1, 6\}$	$\{0, 3\}$

Pripomenieme si, že izomorfizmus je zobrazenie, ktoré zobrazí jednu grupu na druhú so zachovaním všetkých štruktúrnych osobitostí. To znamená, že neutrálny prvok sa musí zobrazovať na neutrálny, generátor na generátor, k-prvková podgrupa na k-prvkovú podgrupu.

Pre úspešný postup stačí zobrazovať generátor na generátor (dve možnosti – prečo nie 4?) a všetko ostatné "sa spraví samo".

1. izomorfizmus

	Generátor	Generované prvky (podľa poradia, ako sú generované)
$(\mathbb{Z}_6, +)$	1	2, 3, 4, 5, 0
	↓	↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *)$	3	2, 6, 4, 5, 1

2. izomorfizmus

	Generátor	Generované prvky (podľa poradia, ako sú generované)
$(\mathbb{Z}_6, +)$	1	2, 3, 4, 5, 0
	↓	↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *)$	5	4, 6, 2, 3, 1

Uvedený postup je bezpečný. Uistite sa, že naozaj boli zachované všetky štruktúrne osobitosti – podgrupy sa zobrazili na podgrupy, generátor podgrupy sa zobrazil na generátor podgrupy, atď.

Príklad 11a

Je grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ cyklická? Ak áno, nájdite jej generátory a všetky jej netrivi. podgrupy.

Riešenie

Uvedenú grupu tvoria prvky (00), (01), (02), (10), (11), (12). Operáciou je + s dodatkom modulo 2 na prvej zložke a modulo 3 na druhej zložke.

Vyskúšame generačný potenciál všetkých prvkov.

(00) – neutrálny

(10), (00)

(01), (02), (00)

(11), (02), (10), (01), (12), (00)

(02), (01), (00)

(12), (01), (10), (02), (11), (00)

Grupa je cyklická, jej generátory sú (11) a (12).

Príklad 11b

Grupa z 11a je cyklická, má 6 prvkov, takže musí byť izomorfná so $(\mathbb{Z}_6, +)$. Nájdite všetky izomorfizmy.

Riešenie

Izomorfizmy podľa očakávaní existujú dva, určíme ich zobrazením generátora na generátor:

1. izomorfizmus

	Generátor	Generované prvky (podľa poradia, ako sú generované)				
$(\mathbb{Z}_6, +)$	1	2,	3,	4,	5,	0
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$	(11) ,	(02),	(10),	(01),	(12),	(00)

2. izomorfizmus

	Generátor	Generované prvky (podľa poradia, ako sú generované)				
$(\mathbb{Z}_6, +)$	1	2,	3,	4,	5,	0
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$	(12) ,	(01),	(10),	(02),	(11),	(00)

Príklad 12

Je grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ cyklická? Ak áno, nájdite jej generátory a všetky jej netrivi. podgrupy.

Riešenie

Vyskúšame generačný potenciál všetkých prvkov.

(00) – neutrálny

(10), (00)

(01), (00)

(11), (00)

Ako vidno, žiaden z prvkov grupy nie je jej generátorom, grupa teda nie je cyklická a pochopiteľne ani nie je izomorfná so $(\mathbb{Z}_4, +)$. Prečo to nevychádza, hoci v predošlom príklade to vyšlo? Odpoveď iba naznačíme – 2 a 3 sú nesúdeliteľné, kým 2 a 2 nie tak celkom...

Podgrupy: daná grupa má tri rôzne netriviálne podgrupy.

Príklad 13

Je daná grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$. Nájdite všetky jej netriviálne podgrupy.

Riešenie

V zadaní nie je otázka o cyklickosti grupy a jej generátoroch. Prečo?

Daná množina je tvorená dvojicami čísel, 0, 1 na prvej zložke a 0,1,2,3 na druhej (spolu 8 dvojíc). Operácia $+$ účinkuje "modulo 2" na prvej zložke a "modulo 4" na druhej zložke (v celom príklade). Neutrálny prvok je (00).

Testujme generačný potenciál prvkov:

(01), (02), (03), (00)	dostávame $(\{0\} \times \mathbb{Z}_4, +)$
(03), (02), (01), (00)	dostávame $(\{0\} \times \mathbb{Z}_4, +)$
(02), (00)	dostávame $(\{0\} \times 2\mathbb{Z}_2, +)$
(10), (00)	dostávame $(\mathbb{Z}_2 \times \{0\}, +)$
(11), (02), (13), (00)	toto sa nedá pekne zapísať kartézskym súčinom
(13), (02), (11), (00)	toto sa nedá pekne zapísať kartézskym súčinom
(12), (00)	toto sa nedá pekne zapísať kartézskym súčinom

Dostali sme zatiaľ 5 netriviálnych podgrúp. (Slabším odtieňom sú zapísané výsledky, ktoré sa opakujú.) Stále platí a bude platiť, že počty prvkov v podgrupách sú deliteľmi čísla 8.

Na rozdiel od predošlých príkladov bude potrebné (prečo?) preskúmať tiež možnosti generovania podgrupy viacerými prvkami. Ak vezmeme prvok, čo generuje 4-prvkovú podgrupu, pridaním ďalšieho prvku nezískame nič nové (prečo?). Zmysel má preto preskúmať len kombinácie dvojíc, ktoré nám generovali 2-prvkové podgrupy:

(10), (02), (12), (00)
(10), (12), (02), (00)
(02), (12), (01), (00)
(10), (02), (12), (00)

Všetky možné kombinácie vedú k rovnakému, ale novému výsledku. Máme teda ešte šiestu netriviálnu podgrupu $(\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_2, +)$.

Pre lepšiu predstavu toho, čo sme vlastne našli, je vhodné si nakresliť obrázky/tabuľky jednotlivých podgrúp.

Pôvodná grupa:	00	01	02	03
	10	11	12	13

Podgrupy (farebne zvýraznené):

– dvojprvkové				– štvorprvkové			
00	01	02	03	00	01	02	03
10	11	12	13	10	11	12	13
00	01	02	03	00	01	02	03
10	11	12	13	10	11	12	13
00	01	02	03	00	01	02	03
10	11	12	13	10	11	12	13

Neriešené príklady

1. Je daná grupa G regulárnych matic 2×2 s operáciou matic. násobenia $*$ a jej podmnožina $H = \{ M \in G, M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \}$. Overte, či platí $(H, *) \subset (G, *)$.

2. Nájdite čo najmenšiu grupu s operáciou maticového násobenia, ktorá obsahuje prvok:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

3. Nech $H = \{m/n; m, n \text{ sú prirodzené nepárne}\}$. Dokážte, že $(H, *) \subset (\mathbb{Q}_{\setminus\{0\}}, *)$.

4. Je daná množina $S = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$. Zistite, či $(S, *)$ je podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$.

5. Je daná množina $S = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$ a zobrazenie $h: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (S, *)$ dané predpisom
$$h(x) = \exp(i2\pi x).$$

a) Dokážte, že h je homomorfizmus.

b) Nájdite jadro operácie h a dokážte, že je (s operáciou $+$) podgrupou $(\mathbb{R}, +)$.

6. Je daná grupa $S = (\{z \in \mathbb{C}, z^6=1\}, *)$. Je cyklická? Nájdite všetky jej podgrupy a nakreslite ich v komplexnej rovine.

7. Je dané pevné prirodzené číslo n a množina $S = \{z \in \mathbb{C}, z^n \in \mathbb{R}_+\}$. Zistite, či $(S, *)$ je podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$.

8. Zistite, či je daná grupa cyklická. Ak áno, nájdite jej generátory. Nájdite všetky jej netriviálne podgrupy.

- a) $(\mathbb{Z}_4, +)$
- b) $(\mathbb{Z}_8, +)$
- c) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$
- d) $(\mathbb{Z}_{30}, +)$
- e) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, +)$
- f) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6, +)$
- g) $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, *)$
- h) $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, *)$

9. V predošlej úlohe, v prípadoch a,b,c,d zistite, koľko má grupa rôznych automorfizmov a aspoň jeden vypíšte.

V prípadoch e,f,g,h: určte počet izomorfizmov medzi danou grupou a vhodnou grupou typu $(\mathbb{Z}_n, +)$ a jeden z nich vypíšte

10. Dokážte, že $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, +)$ je cyklická grupa, nájdite všetky jej generátory a netriviálne podgrupy. Koľko je všetkých izomorfizmov medzi $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, +)$? Aspoň jeden vypíšte.

11. Je grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, +)$ cyklická? Koľko má cyklických podgrúp?

12. Nájdite najmenšiu množinu J takú, že $(\mathbb{Z}_9 \setminus J, *)$ bude cyklická grupa. Nájdite všetky jej podgrupy a uveďte príklady grúp, ktoré sú s $(\mathbb{Z}_9 \setminus J, *)$ izomorfné.

!!! Príklad 8 sa svojím rozsahom môže považovať za 4 bežné príklady.

!!! Aj príklad 9 sa svojím rozsahom môže považovať za 4 bežné príklady.