

Permutácie

Základné pojmy + Riešené príklady

Permutácia

Permutáciou sa rozumie preusporiadanie radu prvkov. Vieme to zapísať **dvoma** spôsobmi.

1. Prvky usporiadané v rade očísľujeme/onálepkujeme číslami 1 až n. Po ich preusporiadaní zapíšeme do nového riadku nové poradie pôvodných poradových čísel.

Napríklad:

kôň	žirafa	slon	hroch
1	2	3	4

Preusporiadanie:

slon	kôň	hroch	žirafa
3	1	4	2

V algebre nás živočíšna podstata týchto prvkov nezaujíma, takže budeme pracovať len s poradovými číslami, za ktorými sa môže skrývať čokoľvek. Uvedené preusporiadanie – permutáciu teda zredukujeme iba na nasledujúcu informáciu:

1 2 3 4
3 1 4 2

Dobre si treba uvedomiť, čo tento zápis znamená a ako ho treba čítať. Po stĺpcoch:
na prvé miesto prichádza to, čo bolo predtým na treťom; na druhé miesto ide to, čo bolo predtým na prvom; na tretie miesto ide to, čo bolo predtým na štvrtom; na štvrté miesto ide to, čo bolo predtým na druhom.

2. Permutáciu vieme zapísať aj iným spôsobom – tak, že zapíšeme čísla za sebou v takom poradí, v akom budú po sebe preberať pozície. Preformulujeme (a preusporiadame) poslednú vetu z odstavca 1: na prvé miesto prišiel prvok z tretej pozície, na tretiu pozíciu prišiel prvok zo štvrtéj, na štvrtú prišiel prvok z druhej, na druhú pozíciu prišiel prvok z prvej pozície.

1 3 4 2 1
1 ← 3 ← 4 ← 2 ← 1

Stručnejšie: (1 3 4 2)

Vysvetlenie postupu je zdĺhavé, v skutočnosti je však jednoduchý a po jeho pochopení vyššie uvedené medzikroky už nebudú potrebné.

Hneď na začiatku si treba uvedomiť, že pri takomto zápise sú uvedené 4 čísla spojené "do kruhu", teda je jedno, či píšeme (1 3 4 2), (3 4 2 1), (4 2 1 3) alebo (2 1 3 4). Všetky uvedené zápisy predstavujú to isté.

Spôsob 2 – tzv. zápis cez *disjunktné cykly* – je stručnejší ako 1, lepšie sa s ním pracuje a navyše na prvý pohľad vie ukázať cykly, z ktorých sa permutácia skladá.

Príklad 1

Je daná permutácia (spôsob 1):

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{array}$$

Prepíšte ju spôsobom 2.

Riešenie:

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 1$$

Zacyklilo sa to skôr, ako sme vyčerpali všetky čísla. Znamená to, že cyklov je viac, pokračujeme teda s ďalším ešte nepoužitým číslom.

$$3 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 3$$

Výsledok:

$$(1\ 2\ 5\ 4)(3\ 7\ 6)$$

Príklad 2

Je daná permutácia

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 \end{array}$$

Prepíšte ju cez disjunktné cykly.

Riešenie:

Ideme na to už priamo bez medzikrokov:

$$(1\ 2\ 3\ 4)(5)(6\ 7)$$

Objavil sa triviálny cyklus, pozícia 5 ostala "namieste". Triviálne cykly sa nemusia zapisovať (a je zvykom ich nezapisovať), výsledok teda bude vyzeráť takto:

$$(1\ 2\ 3\ 4)(6\ 7)$$

Rád cyklu

Rád cyklu je počet jeho prvkov. Vyjadruje počet "koľkokrát sa musí cyklus aplikovať, aby sa prvky dostali do pôvodného poradia".

Cyklus (6 7) prehodí prvky na 6. a 7. pozíciu. Ak to spraví aj druhýkrát, prvky sa vrátia na pôvodné miesto. Cyklus (1 2 3 4) bude s prvkami 1 2 3 4 robiť toto:

0.	1 2 3 4
1.	2 3 4 1
2.	3 4 1 2
3.	4 1 2 3
4.	1 2 3 4

Po štyroch aplikáciách je všetko späť.

Rád permutácie

Rád permutácie vyjadruje počet "koľkokrát sa musí permutácia (ako celok) aplikovať, aby sa prvky dostali do pôvodného poradia". Asi nie je ťažké pochopiť, že pri aplikovaní permutácie si každý cyklus na svojom výsostnom teritóriu posunie svoje prvky o jednu pozíciu. Všetko sa vráti späť vtedy, keď každý cyklus v rovnakej chvíli dosiahne pôvodný stav. Rád permutácie preto musí byť najmenším spoločným násobkom rádoov cyklov, z ktorých je zostavený.

Príklad 3

Je daná permutácia $(1\ 2\ 3\ 4)(6\ 7)$ z príkladu 2. Zistite jej rád.

Riešenie:

Cykly majú rád 4 a 2, rád permutácie by teda mal byť $\text{NSN}(4,2) = 4$. Overíme to:

0.	1 2 3 4 5 6 7
1.	2 3 4 1 5 7 6
2.	3 4 1 2 5 6 7
3.	4 1 2 3 5 7 6
4.	1 2 3 4 5 6 7

Dôležité! V téme permutácií je potrebné dôsledne odlišovať rôzne skutočnosti (zapísané podobným spôsobom):

- primárny predpis permutácie písaný v dvoch riadkoch
- účinok permutácie aplikovaný na čísla $1\ 2\ \dots\ n$: po prvej aplikácii je to druhý riadok z dvojriadkového zápisu, po ďalších aplikáciách už nie
- predpis permutácie zapísaný cez disjunktné cykly (píše sa do zátvoriek)

Párnosť cyklu

Transpozíciou nazveme prehodenie dvoch prvkov. Napr. cykly $(6\ 7)$ alebo $(3\ 5)$ sú transpozície. Dlhšie cykly sa dajú poskladať z viacerých transpozícií.

Účinok cyklu $(1\ 2\ 3\ 4)$ je

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

a vieme ho dosiahnuť aj pomocou 3 transpozícií takto:

$1\ 2\ 3\ 4 \rightarrow 2\ 1\ 3\ 4 \rightarrow 2\ 3\ 1\ 4 \rightarrow 2\ 3\ 4\ 1$

Jednoduchým zovšeobecnením uvedeného príkladu je pravidlo, že cyklus dĺžky n pozostáva z $(n-1)$ transpozícií. Párnosť/nepárnosť cyklu zodpovedá párnosti/nepárnosti čísla $(n-1)$. Ak permutácia pozostáva z k cyklov dĺžky $n_1, n_2, \dots, n_k$, tak každý cyklus prispeje svojím počtom transpozícií $-(n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1)$. Párnosť/nepárnosť tohto súčtu je zároveň párnosť/nepárnosť permutácie ako celku.

Príklad 4

Určte rád a párnosť permutácií:

- a) $(1\ 3\ 4)(2\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 0)$
b) $(1\ 3\ 4)(2\ 5)(6\ 7\ 8\ 9)$

Riešenie:

- a) Rád je $NSN(3,2,5) = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$
Párnosť: $2+1+4 = 7 \rightarrow$ nepárna
b) Rád je $NSN(3,2,4) = 12$
Párnosť: $2+1+3 = 6 \rightarrow$ párna

Neutrálna a inverzná permutácia

Neutrálna permutácia (prvok e) sa označuje I alebo Id (identita). Je to permutácia, ktorá nechá všetko namieste (tj. príde, nič nespraví a to vykáže ako svoju činnosť). Pozostáva iba z triviálnych cyklov, ktoré "sa nepíšu". Takže neostáva iné, ako ju zapísať značkami I, Id, e .

Ak máme permutáciu p rádu n , podľa definície rádu platí $p^n = Id$, kde $p^n = p \circ p \circ \dots \circ p$ (p aplikovaná n -krát). Inverzným prvkom ku p teda musí byť p^{n-1} .

Príklad 5

Nájďme inverznú permutáciu ku $p = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$

Riešenie:

Čo spôsobí p : prvok na pozícii 2 sa posunie na pozíciu 1
prvok na pozícii 4 sa posunie na pozíciu 2
prvok na pozícii 1 sa posunie na pozíciu 3
prvok na pozícii 3 sa posunie na pozíciu 4

Inverzná p^{-1} musí spôsobiť opak, to znamená že

prvok na pozícii 1 sa vráti na pozíciu 2
prvok na pozícii 2 sa vráti na pozíciu 4
prvok na pozícii 3 sa vráti na pozíciu 1
prvok na pozícii 4 sa vráti na pozíciu 3

$$p^{-1} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

Technicky vzaté (aby sme to vyjadrili stručnejšie) – udialo sa to, že v zápise p sme prehodili oba riadky a potom sme stĺpce usporiadali podľa vrchnej hodnoty:

Východisko:		Prehodit' riadky:		Usporiadať:
$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$

Zapíšeme teraz permutácie p a p^{-1} v tvare disjunktných cyklov.

$$p = (1\ 2\ 4\ 3) \quad p^{-1} = (1\ 3\ 4\ 2)$$

Samozrejme, zápis p^{-1} je možný aj takto $p^{-1} = (3\ 4\ 2\ 1)$ a už vidíme, že je to "odzadu" prečítaný zápis p . Nie je to náhoda, tak to funguje vždy.

Skladanie permutácií

Na daný rad prvkov možno aplikovať niekoľko permutácií (preusporiadaní) po sebe.

Výsledok je opäť permutácia.

Spôsob ako skladať permutácie, je opísaný v samostatnom dokumente –

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/AlgebraickeStruktury?action=AttachFile&do=get&target=alg.pdf>

K porozumeniu ďalších príkladov je potrebné algoritmus skladania pochopiť a dostať "do krvi".

Grupy permutácií

Všetky možné permutácie reťazca $1\ 2\ 3\ \dots\ n$ (ich počet je $n!$) spolu s operáciou skladania tvoria grupu $(S_n, \circ)$, stručne S_n alebo S_n .

Všetky párne permutácie tvoria takisto grupu (podgrupu S_n), označuje sa A_n . (Odkiaľ vieme, že A_n je grupa?)

Príklad 6

Napíšte Cayleyho tabuľku grupy S_2 .

Riešenie:

$\circ$	I	(12)
I	I	(12)
(12)	(12)	I

Ak by sme premenovali prvky na 0 a 1, táto istá tabuľka bude vyzerat' nasledovne:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Nie je to nič iné, ako grupa $(\mathbb{Z}_2, +)$, preto sme mohli aj premenovať operáciu $\circ$ na $+$. Z hľadiska algebry ide o tú istú štruktúru – ako pomenujeme prvky alebo čo reprezentujú, nie je podstatné.

Príklad 7

Overte, že S_3 je grupa. Napíšte jej Cayleyho tabuľku.

Riešenie:

Prvky

Nádejnú grupu S_3 tvoria všetky permutácie 3 prvkov, napr. 1,2,3. Vieme, že ich počet je $3!=6$.

Začneme tým, že si ich vypíšeme – v tradičnom tvare aj cez disjunktné cykly.

Systém vypisovania: žiadna zmena (a), prehodenie dvoch prvkov (b,c,d), preusporiadanie všetkých troch prvkov (e,f).

a) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

Cez disj. cykly: $(1)(2)(3) = I$

b) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$

Cez disj. cykly (23)

c) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$

Cez disj. cykly (12)

d) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$

Cez disj. cykly (13)

e) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$

Cez disj. cykly (123)

f) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$

Cez disj. cykly (132) alebo aj (321)

Našli sme 6 možností a vieme, že ich má byť 6, takže je to v poriadku.

Vlastnosti

Operácia: ak urobíte dvakrát po sebe nejaké permutácie prvkov 1,2,3, dostanete opäť nejakú permutáciu 1,2,3. Stále je to to tom, že budete mať prvky 1,2,3 v nejakom poradí.

Asociatívnosť: priamy dôkaz by bol zložitý, odvoláme sa preto na niečo, čo poznáme.

Každá permutácia sa dá vyjadriť maticou – vždy sa dá nájsť matica (jednotková matica s poprehadzovanými stĺpcami), ktorou keď vynásobíme $(1\ 2\ 3)$ sprava, dostaneme požadované zmenené poradie. Príklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0; \\ 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Skladanie n permutácií je vlastne vynásobenie vektora $(1\ 2\ 3)$ postupne n maticami. A vieme z LA, že súčin matíc je asociatívny.

Neutrálny prvok: Neutrálny prvok je I, teda permutácia, ktorá nezmení poradie.

Ak aplikujete permutáciu p a potom I, tak ste aplikovali p a hotovo.

Ak aplikujete I (teda nespravíte nič) a potom p, tak ste urobili p.

Inverzný prvok: v prípade S_3 vieme vybaviť túto položku vypísaním inverzných prvkov ku každej permutácii:

I	$\leftrightarrow$	I
(12)	$\leftrightarrow$	(12)
(13)	$\leftrightarrow$	(13)
(23)	$\leftrightarrow$	(23)
(123)	$\leftrightarrow$	(132)
(132)	$\leftrightarrow$	(123)

Potrebné vlastnosti sú overené, je to teda grupa. Uvidíme však, že nie je komutatívna.

Tabuľka

Vypíšeme Cayleyho tabuľku, čo je tabuľka výsledkov skladania "každej s každou".

V riadkoch je ľavá permutácia, v stĺpcoch pravá.

Začnime najprv tým, čo vieme napísať bez počítania

$$I \circ p = p, p \circ I = p$$

$$p \circ p^{-1} = I$$

°	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
I	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	I				
(13)	(13)		I			
(23)	(23)			I		
(123)	(123)					I
(321)	(321)				I	

Ostatné musíme dopočítať. Algoritmus poznáme.

Druhý stĺpec – pod (12):

$$(13)(12) = (123)$$

$$(23)(12) = (132)$$

$$(123)(12) = (13)$$

$$(321)(12) = (23)$$

	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
Id	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	Id				
(13)	(13)	(123)	Id			
(23)	(23)	(132)		Id		
(123)	(123)	(13)				Id
(321)	(321)	(23)			Id	

Tretí stĺpec – pod (13):

$$(12)(13) = (132)$$

$$(23)(13) = (123)$$

$$(123)(13) = (23)$$

$$(321)(13) = (12)$$

°	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
Id	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	Id	(132)			
(13)	(13)	(123)	Id			
(23)	(23)	(132)	(123)	Id		
(123)	(123)	(13)	(23)			Id
(321)	(321)	(23)	(12)		Id	

Štvrtý stĺpec – pod (23):

$$(12)(23) = (123)$$

$$(13)(23) = (132)$$

$$(123)(23) = (12)$$

$$(321)(23) = (13)$$

°	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
Id	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	Id	(132)	(123)		
(13)	(13)	(123)	Id	(132)		
(23)	(23)	(132)	(123)	Id		
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)		Id
(321)	(321)	(23)	(12)	(13)	Id	

Piaty stĺpec – pod (123):

$$(12)(123) = (23)$$

$$(13)(123) = (12)$$

$$(23)(123) = (13)$$

$$(123)(123) = (132)$$

°	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
Id	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	Id	(132)	(123)	(23)	
(13)	(13)	(123)	Id	(132)	(12)	
(23)	(23)	(132)	(123)	Id	(13)	
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(321)	Id
(321)	(321)	(23)	(12)	(13)	Id	

Šiesty stĺpec – pod (321):

Netreba počítať, stačí v riadku doplniť chýbajúci prvok (vieme, že v riadku ani stĺpci sa nesmú opakovať rovnaké prvky, lebo je to grupa)

°	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
Id	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	Id	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	Id	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	Id	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(321)	Id
(321)	(321)	(23)	(12)	(13)	Id	(123)

Podgrupy

Téma podgrúp sa objaví na niektorej z najbližších prednášok. Tento odstavec teraz pokojne preskočte, vrátíme sa ešte k nemu o pár týždňov.

Podgrupy sú $\{I, (12)\}$, $\{I, (13)\}$, $\{I, (23)\}$, $\{I, (123), (321)\}$ – vyberme príslušné riadky a stĺpce a vidíme, že ide o podmnožiny uzavreté vzhľadom na operáciu:

°	Id	(12)
Id	Id	(12)
(12)	(12)	Id

°	Id	(13)
Id	Id	(13)
(13)	(13)	Id

°	Id	(23)
Id	Id	(23)
(23)	(23)	Id

°	Id	(123)	(321)
Id	Id	(123)	(321)
(123)	(123)	(321)	Id
(321)	(321)	Id	(123)

Posledná z podgrúp – to sú párne permutácie 3 prvkov – $A_3 = \{I, (123), (321)\}$

Príklad 8

Je daný pravidelný štvorsten s vrcholmi 1,2,3,4. Nájdite grupu všetkých jeho rotácií. (Rotáciou sa rozumie to, že položíme štvorsten na papier, obkreslíme jeho podstavu, potom ho nejak pootáčame a opäť položíme (rovnakou alebo inou stenou) do nakreslených obrysov podstavy. Pri rotácii nie sú dovolené zrkadlové preklopenia).

Riešenie:

Najprv si ozrejmieme, koľko rotácií štvorstena existuje. Treba si pritom uvedomiť, že ak napr. rozhodnem, kde budú vrcholy 1,2, tak pozícia vrcholov 3,4 už je určená. Stačí sa teda pýtať, koľkými spôsobmi vieme umiestniť vrcholy 1,2 na 4 možné pozície. Odpoveď je $(4 \text{ nad } 2) = 12$. Hľadáme teda 12-prvkovú množinu.

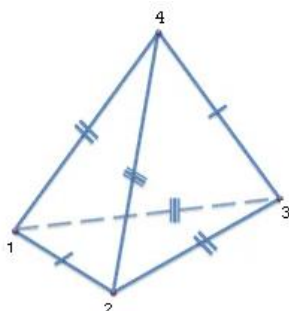
Treba teda pozorne vymenovať všetky možné rotácie.

a) Jednoduché rotácie okolo vrchola – jeden vybraný vrchol "stojí" a ostatné 3 sa pretočia doprava alebo doľava:

$(123), (132), (134), (143), (124), (142), (234), (243)$

b) Otočenia o uhol π okolo priamky pretínajúcej stredy protiláhlých strán (3 možnosti označené /, //, ///):

$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$



c) Máme 11 rotácií, spolu s identitou je to 12. Ďalej hľadať netreba, máme všetky.

Vypísané rotácie sú nejaké permutácie prvkov 1234. Vieme, že S_4 má $4!=24$ prvkov, rotácie štvorstena teda predstavujú polovicu z nich. Ak sa lepšie na to pozrieme, vidíme, že ide o párne permutácie – a tie tvoria grupu (toto tvrdenie si overte) označovanú A_4 .

Príklad 9

Aký najvyšší rád môže mať permutácia z grupy S_{10} , S_{12} ?

Riešenie:

Pri hľadaní odpovede si postupne uvedieme aj niektoré užitočné pravidlá.

Pri permutácii reťazca n prvkov volíme cykly, ktorých dĺžky v súčte dávajú najviac n .

Pre S_{10} : 1 cyklus – max. dĺžka 10, teda rád 10.
 2 cykly – 8/2 (rád 8), 7/3 (rád 21), 7/2 (rád 14), 6/4 (rád 12), 6/3 (rád 6)
 5/5 (rád 5), 5/4 (rád 20), 5/3 (rád 15), 5/2 (rád 10), ...
 3 cykly – 6/2/2 (rád 6), 5/3/2 (rád 30), 5/2/2 (rád 10), ...

Vítazom je kombinácia 5/3/2, čo môže byť napr. permutácia (1 2 3 4 5)(6 7 8)(9 10) .

V možnostiach, kde dĺžky cyklov boli súdeliteľné, sme strácali. Je vždy lepšie voliť nesúdeliteľné dĺžky, hoci aj so súčtom menším ako n (napr. 5/5 bolo slabšie ako 5/4). Ale v rámci možností by súčet mal byť čo najbližšie k n .

Pre S_{12} : 1 cyklus – max. dĺžka 12, teda rád 12.
 2 cykly – 9/2 (18), 8/3 (24), 7/5 (35)

Čím sú si dĺžky cyklov bližšie (pri rovnakom súčte), tým vyšší rád permutácie dostaneme.

3 cykly – 7/3/2 (42), 5/4/3 (60)

Vítazom je kombinácia 5/4/3 s rádom 60, čo môže byť napr. (1 2 3 4 5)(6 7 8 9)(10 11 12) .

Neriešené príklady

1. Sú dané permutácie

$$p = (14)(235)(78)$$

$$q = (234)(67)$$

$$r = (135)(24)(68)$$

- a) Zistite ich rád a paritu.
- b) Nájdite k daným permutáciám ich inverzné protipóly.
- c) Zjednodušte na disjunktné cykly: pqr , prq , rqp , rpq , qpr , qrp

2. Je daná $p = (167)(3524)$. Vypočítajte p^{121} , p^{122} , p^{123} .

3. Aký najvyšší rád môže mať permutácia z grupy S_{15} , S_{19} , S_{24} ?

4. Nájdite grupu všetkých symetrií rovnostranného trojuholníka (zobrazení do seba samého) a skúmajte jej vzťah k S_3 .

5. Vypíšte všetky prvky S_4 .

6. Overte, že A_4 je grupa. (Môžete si pomôcť tým, že ide napr. o rotácie štvorstena.)