

Binárne operácie

Prehľad pojmov

n-árnou operáciou na množine M sa nazýva zobrazenie $f: M^n \rightarrow M$, teda "predpis", ktorý dodanej n -tici prvkov z M jednoznačným spôsobom priradí výsledok z M . To posledné je kľúčové – výsledok musí padnúť späť do M .

Počas tohto semestra sa budeme osobitne zaoberať binárnymi operáciami $f: M^2 \rightarrow M$, pričom predpis f budeme jednoduchšie zapisovať pomocou značiek $+$, $*$, $\circ$, $\square$, a pod. Takže miesto $f(x,y)=z$ napíšeme napr. $x \circ y = z$.

Pri skúmaní operácií budeme sledovať niekoľko vlastností:

– či predpis naozaj je **operáciou** (výsledok sa vracia do M)

– **komutatívnosť**: pre všetky $x, y \in M$ platí: $x \circ y = y \circ x$ // nezáleží na poradí operandov

– **asociatívnosť**: pre všetky $x, y, z \in M$ platí: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
// nezáleží na poradí vykonania oboch operácií

– **neutrálny prvok** : či existuje prvok $e \in M$ taký, že pre všetky $x \in M$ platí $x \circ e = e \circ x = x$.

Ak operácia nie je komutatívna, môže sa stať, že nájdeme iba
ľavý neutrálny prvok, pre ktorý platí $e_L \circ x = x$ ($\forall x \in M$) alebo len
pravý neutrálny prvok, pre ktorý platí $x \circ e_P = x$ ($\forall x \in M$).
Ak nájdete e_L aj e_P , tak sa musia rovnať a vy ste našli plnohodnotný e (prečo?).

– existencia **inverzných prvkov** : sledujeme, či $\forall x \in M \exists x^{-1} \in M : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$

- Hovoriť o inverzných prvkoch má zmysel iba vtedy, ak máme neutrálny e .
Ak máme iba e_L , e_P , môže v niektorých situáciách mať zmysel hľadať
(nie plnohodnotné) inverzné prvky, to sa posudzuje individuálne a veľmi
opatrne. Od nasledujúceho cvičenia však túto možnosť nechávame bokom.
- Kým neutrálny prvok musí byť jeden univerzálne platný pre celú M , tak inverzný
prvok hľadáme každému x osobitne. Hoci sme inverzný prvok definovali
pomocou binárnej operácie, dá sa hovoriť tiež o unárnej operácii " $^{-1}$ ", ktorá
každému x priradí inverzného kolegu.
- Ak inverzné prvky nevieme nájsť pre všetky x , môže to byť zaujímavé,
ale nie je to v plnom zmysle slova vlastnosť existencie inverzných prvkov.
V takejto situácii môže pomôcť zúžiť definičný obor.
- Ak dokážeme splniť iba jednu z dvoch rovností, hovoríme o
ľavom inverznom prvku, pre ktorý platí $x^{-1}_L \circ x = e$ alebo o
pravom inverznom prvku, pre ktorý platí $x \circ x^{-1}_P = e$.
- Ak nájdete x^{-1}_L aj x^{-1}_P a operácia je asociatívna, tak ste našli x^{-1} ($x^{-1}_L = x^{-1}_P$). Prečo?
- Obvykle v algebre inverzný prvok značíme x^{-1} . Netreba si to mýliť s prevrátenou
hodnotou $1/x$ z analýzy!

– **absorpčný prvok** : či existuje prvok $o \in M$ taký, že pre všetky $x \in M$ platí $x \circ o = o \circ x = o$.

Ak operácia nie je komutatívna, môže sa stať, že nájdeme iba
ľavý absorpčný prvok, pre ktorý platí $o_L \circ x = o_L$ ($\forall x \in M$) alebo len
pravý absorpčný prvok, pre ktorý platí $x \circ o_P = o_P$ ($\forall x \in M$).
Ak nájdete o_L aj o_P , tak sa musia rovnať a vy ste našli plnohodnotný o (prečo?).

Riešené príklady

Príklad 1:

Na ilustráciu pojmov najprv preskúmame základné aritmetické operácie.

+ na $\mathbb{N}$:

operácia to je (súčet dvoch prirodzených čísel je prirodzené číslo)

komutatívna ✓, asociatívna ✓ (učivo ZŠ)

neutrálny prvok $e=0$, ale 0 nie je prirodzené číslo. Koniec? Nie, zmeníme def. obor:

+ na $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$:

operácia, komutatívna, asociatívna ✓

neutrálny prvok $e=0$

inverzné prvky: $x^{-1} = -x$

absorpčný prvok neexistuje

- na $\mathbb{N}$:

nie je operácia, napr. $3-8$ nie je z $\mathbb{N}$

- na $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$:

operácia ✓

komutatívna ani asociatívna nie je (učivo ZŠ)

neutrálny prvok	ľavý musí spĺňať	$e_L - x = x$	– nenájdeme
	pravý musí spĺňať	$x - e_P = x$	vyhovuje $e_P = 0$

inverzné prvky – obmedzene!

$$x^{-1}_L - x = 0 \Rightarrow x^{-1}_L = x$$

$$x - x^{-1}_P = 0 \Rightarrow x^{-1}_P = x \Rightarrow x^{-1} = x$$

Pre každé x vieme nájsť inverzný prvok, ale výsledok oslabuje to, že máme len e_P .

Absorpčný prvok neexistuje.

* (násobenie) na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$:

operácia ✓, komutatívna ✓, asociatívna ✓ (učivo ZŠ)

neutrálny prvok $e=1$

inverzné prvky ($x^{-1}=1/x$) na daných množinách nenájdeme.

* (násobenie) na $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$:

inverzné prvky $x^{-1}=1/x$ // s obmedzením na $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (prečo?)

absorpčný prvok $o=0$ // bez obmedzení o riadok vyššie

: (delenie) na $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je v mnohom podobné ako pri operácii -

operácia (s prvkom 0 by to nešlo),

komutatívna ani asociatívna nie je

neutrálny prvok	ľavý musí spĺňať	$e_L : x = x$	– nenájdeme
	pravý musí spĺňať	$x : e_P = x$	vyhovuje $e_P = 1$

inverzné prvky – obmedzene!

$$x^{-1}_L : x = 1 \Rightarrow x^{-1}_L = x$$

$$x : x^{-1}_P = 1 \Rightarrow x^{-1}_P = x \Rightarrow x^{-1} = x$$

Pre každé x vieme nájsť inverzný prvok, ale výsledok oslabuje to, že máme iba e_P .

Absorpčný prvok: $o_L : x = o_L \Rightarrow o_L = 0$? // opatrne s oslavou, 0 sme vyhodili preč

$x : o_P = o_P$ – nenájdeme

Príklad 2:

Je daná operácia $x \circ y = x^{(y-1)}$ na $M \subset \mathbb{R}$. Nájdite vhodnú množinu M tak, aby daná operácia bola operáciou na M a aby sa dalo potvrdiť čo najviac skúmaných vlastností.

Aby sme sa vyhli nedorozumeniu pri inverzných prvkoch, umocnenie značíme $^{\wedge}$.

Ak chceme dostať výsledok z $\mathbb{R}$, je potrebné sa vyhnúť umocňovaniu záporných čísel na nie celá čísla. Tiež by bolo užitočné nemusieť riešiť 0^0 . Preto vezmeme predbežne $M = \mathbb{R}^+$.

operácia ✓

komutatívna nie je (nájdite vhodný protipríklad)

asociatívna nie je (nájdite vhodný protipríklad)

neutrálny prvok ľavý musí spĺňať $e_L^{\wedge}(x-1) = x$ – nenájdeme
 pravý musí spĺňať $x^{\wedge}(e_P-1) = x$ vyhovuje $e_P = 2$

inverzné prvky – obmedzene!

$x^{-1}_L^{\wedge}(x-1) = 2$ – pre $x=1$ nenájdeme

$x^{\wedge}(x^{-1}_P-1) = 2$ – pre $x=1$ nenájdeme

absorpčný prvok ľavý musí spĺňať $o_L^{\wedge}(x-1) = o_L$ – $o_L = 1$
 pravý musí spĺňať $x^{\wedge}(o_P-1) = o_P$ vyhovuje $o_P = 1 \Rightarrow o=1$

Neuspeli sme pri inverzných prvkoch. Pomohlo by zvoliť $M = (1, \infty)$? Pritom ale máme na pamäti, že existencia iba pravého neutrálneho prvku limituje kvalitu výsledku.

Dostali by sme $x^{-1}_L = 2^{\wedge}(1/(x-1))$
 $(x^{-1}_P-1) = \log_x(2)$

Príklad 3:

Preskúmajte operáciu $x \circ y = x+y-5$ na $\mathbb{Z}$.

operácia ✓, komutatívna ✓

asociatívna je, ale treba si to "ohmatať":

$$(x+y-5)+z-5 = x+(y+z-5)-5 \quad \checkmark$$

neutrálny prvok: $x+e-5=x \Rightarrow e=5$

inverzné prvky: $x+x^{-1}-5=5 \Rightarrow x^{-1}=10-x$

Príklad 4:

Preskúmajte operáciu $x \circ y = x*y/5$ na $\mathbb{R}^+$.

operácia ✓, komutatívna ✓

asociatívna:

$$(x*y/5)*z/5 = x*(y*z/5)/5 \quad \checkmark$$

neutrálny prvok: $x*e/5=x \Rightarrow e=5$

inverzné prvky: $x*x^{-1}/5=5 \Rightarrow x^{-1}=25/x$

Príklad 5:

Preskúmajte operáciu $x \circ y = x + y + 1 \pmod{4}$ na $(\mathbb{Z}_4, +) = (\{0, 1, 2, 3\}, + \pmod{4})$.

Poznámka: V zápise $(\mathbb{Z}_n, +)$ sa automaticky predpokladá mod n pri operácii +.

operácia ✓, komutatívna ✓

asociatívna:

$$((x+y+1) \pmod{4} + z + 1) \pmod{4} = (x + (y+z+1) \pmod{4} + 1) \pmod{4} = (x+y+z+2) \pmod{4}$$

– je jedno, či mod 4 aplikujeme na viackrát alebo iba raz súhrnne na konci

neutrálne prvky:

$$x + e + 1 \pmod{4} = x \Rightarrow e + 1 \pmod{4} = 0 \Rightarrow e = 3$$

inverzné prvky:

$$\text{má platiť } x + x^{-1} + 1 \pmod{4} = 3$$

budeme hľadať x^{-1} v tvare $k * x + m$

$$x + kx + m + 1 \pmod{4} = 3$$

$$(k+1)x + m + 1 \pmod{4} = 3$$

Vidíme, že ak zvolíme $k=3$ a $m=2$, dostaneme to, čo potrebujeme:

$$4x + 2 + 1 \pmod{4} = 3$$

Takže máme $x^{-1} = 3 * x + 2 \pmod{4}$, čo konkrétne znamená, že

$$0^{-1} = 2, 1^{-1} = 1, 2^{-1} = 0, 3^{-1} = 3$$

Napišeme si Cayley-ho tabuľku:

$\circ$	0	1	2	3
0	1	2	3	0
1	2	3	0	1
2	3	0	1	2
3	0	1	2	3

Všimnime si, ako sa prejavujú jednotlivé vlastnosti operácie na údajoch v tabuľke, alebo naopak, ako podľa tabuľky možno spoznať/konkretizovať niektoré z vlastností.

operácia $\Leftrightarrow$ v tabuľke nie sú hodnoty mimo danej množiny

komutatívnosť $\Leftrightarrow$ symetria podľa hlavnej diagonály

asociatívnosť $\Leftrightarrow$ to je trochu komplikovanejšie...

neutrálne prvky $\Leftrightarrow$ ľavý: v jeho riadku sa "zopakuje" vektor vstupných hodnôt
pravý: v jeho stĺpci sa "zopakuje" vektor vstupných hodnôt

inverzné prvky: tu platí $x \circ x^{-1} = 3$, takže sa pozrieme, kde je v tabuľke výsledok 3. Čísla x, y , ktoré "dajú" spolu 3, sú si navzájom inverzné. V tomto prípade, už poučení, sme mohli teda hľadať inverzné prvky z tabuľky (bez tých úvah o k, m)

Príklad 6:

Preskúmajte operáciu danú tabuľkou:

$\circ$	0	1	2	3
0	2	2	0	0
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	2	0	3	1

komutatívna – nie je (nesymetrická tabuľka).

asociatívna – ? posúdime neskôr

neutrálny prvok – $e=2$

inverzné prvky: hľadáme v tabuľke výsledky 2 a dvojice, ktoré ich spôsobili

x^{-1}_L	x	x^{-1}_P
0,3	0	0,1
0	1	–
2	2	2
–	3	0

Vidíme, že 3 nemá ľavý inverzný a 1 nemá pravý inverzný prvok. Nie je to teda plnohodnotná vlastnosť existencie inv. prvkov.

Vidíme, že 0 má dva ľavé a dva pravé inverzné prvky. Operácia teda nemôže byť a ani nie je asociatívna.

Príklad 7:

Je dané univerzum X a množina všetkých jeho podmnožín 2^X . Overte vlastnosti operácií zjednotenia $\cup$ a prieniku $\cap$ na 2^X .

zjednotenie $\cup$

operácia, komutatívna, asociatívna (dôkaz obrázkom –Vennove diagramy) ✓

neutrálny prvok – má platiť $A \cup E = A$, takže $E = \emptyset$

inverzné prvky – má platiť $A \cup A^{-1} = \emptyset$, čo sa nepodarí.

prienik $\cap$

operácia, komutatívna, asociatívna (dôkaz obrázkom –Vennove diagramy) ✓

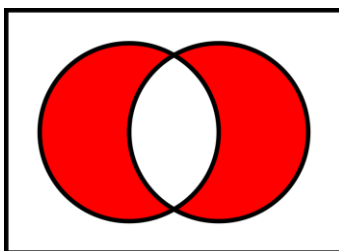
neutrálny prvok – má platiť $A \cap E = A$, takže $E = X$

inverzné prvky – má platiť $A \cap A^{-1} = X$, čo sa nepodarí.

Príklad 8:

Je dané univerzum X a množina všetkých jeho podmnožín 2^X . Overte vlastnosti operácie *symetrická diferenciacia* Δ na 2^X .

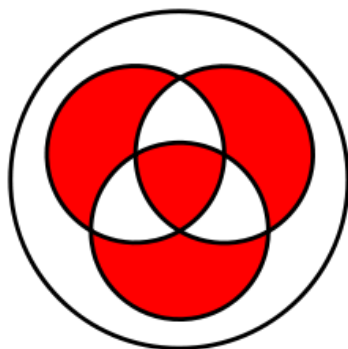
$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$



(Obrázky sú z wikipédie https://sk.wikipedia.org/wiki/Symetrick%C3%A1_diferencia)

operácia, komutatívna ✓

asociatívna (dôkaz obrázkom –Vennove diagramy) ✓



neutrálny prvok – má platiť $A \Delta E = A$, takže $E = \emptyset$

inverzné prvky – má platiť $A \cup A^{-1} = \emptyset$, preto $A^{-1} = A$.

Neriešené príklady

1. V nasledujúcich príkladoch overte, či ide o binárnu operáciu a preskúmajte jej vlastnosti.

- a) $x \circ y = \max(x, y)$, na množine $\mathbb{R}$
- b) $x \circ y = \max(x, y)$, na množine $[0, \infty)$
- c) $x \circ y = x$, na množine $\mathbb{R}$
- d) $x \circ y = 2x$, na množine $\mathbb{R}$
- e) $x \circ y = x + 2y$, na množine $\mathbb{R}$
- f) $x \circ y = 2x + 2y$, na množine $\mathbb{R}$
- g) $x \circ y = 2x + 2y + 2$, na množine $\mathbb{R}$

2. V nasledujúcich príkladoch overte, či ide o binárnu operáciu a preskúmajte jej vlastnosti.

a)

$x \circ y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	0	0
2	2	0	3	1
3	3	0	1	1

b)

$x \circ y$	0	1	2	3
0	1	2	3	0
1	2	3	0	1
2	3	0	1	2
3	0	1	2	3

3. Overte, že zadaný predpis je binárnou operáciou. Preskúmajte jej vlastnosti. Upravte definičný obor (konkretizujte "{?}") tak, aby pre každé x existoval inverzný prvok.

- a) $x \circ y = xy + x + y$, na množine $\mathbb{R} \setminus \{?\}$
- b) $x \circ y = xy + 2(x+y) + 2$, na množine $\mathbb{R} \setminus \{?\}$
- c) $x \circ y = xy + 0.1 \cdot (x+y) - 0.09$, na množine $\mathbb{R} \setminus \{?\}$

4.* Overte, že zadaný predpis je binárnou operáciou.

$$x \circ y = xy + k(x + y) + m, \quad \text{na množine } \mathbb{R} \setminus \{?\}$$

Je komutatívna? Pre aké k, m je operácia asociatívna? Aký má neutrálny prvok? Upravte definičný obor (konkretizujte "{?}") tak, aby pre každé x existoval inverzný prvok.

5. Napíšte Cayleyho tabuľku operácie $*$ (násobenie) na množine $\{1, -1, i, -i\}$, kde i je imaginárna jednotka. Preskúmajte vlastnosti tejto operácie.

6. Koľko rozličných binárnych operácií existuje na množine $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$?

7.* Vypíšte (cez Cayleyho tabuľky) všetky možné binárne operácie na množine $\{0, 1\}$ a overte ich vlastnosti. (pomôcka – na základe pr. 6 najprv určte, koľko ich bude)

8. Overte vlastnosti operácií $+$ (sčítanie), $*$ (súčin), $\cdot$ (súčin po zložkách) na množine regulárnych matic $n \times n$.