

Mohutnosť (kardinalita) množiny

Základné pojmy a súvislosti

Téma cvičenia je iba základný rýchlokurz na intuitívnej úrovni. Treba mať na pamäti, že viaceré veci sú v skutočnosti trochu komplikovanejšie a pri snahe o ich pochopenie sa nedá vyhnúť vŕtaniu sa v základných axiómami matematiky.

Mohutnosť (kardinalita)

1. Ak je množina konečná, jej mohutnosť je nezáporné číslo, a to počet prvkov množiny.
 2. Keď je množina nekonečná, možností je viac. Totiž nie je nekonečno ako nekonečno – sú rôzne "levely" a posúdenie, o aké veľké nekonečno ide, nie je možné na základe spočítania prvkov (že by to trvalo príliš dlho, je ešte ten menší problém).
-

Porovnávanie mohutností

Dve konečné množiny majú rovnakú mohutnosť vtedy, keď majú rovnaký počet prvkov.

Zistiť, či majú dve nekonečné množiny, napr. A a B, rovnakú mohutnosť, sa dá na základe nájdenia bijekcie. Ak existuje bijekcia medzi A a B, teda vieme prvky A pekne bez výnimiek spárovať s prvkami B, tak obe množiny majú rovnakú mohutnosť.

Kultúrna vsuvka:

Příklad ovčáka (text z wikipedie)

Představme si ovčáka, který má dvě stáda ovcí – bílých a černých. Ovčák se rozhodne zjistit, které ze stád je větší, ale má velký problém – neumí počítat. Dlouho nad svým problémem přemýšlí, až ho napadne jednoduché řešení. Bere postupně ovce vždy po jedné z každého stáda a přivazuje je k sobě, vždy černou k bílé. Ví, že až s tím skončí, nezbude mu buď žádná volná bílá ovce, ale několik černých ano, nebo nezbude naopak žádná volná černá, ale několik bílých ano a konečně se může stát, že nezbude žádná bílá ani černá ovce. V prvním případě ovčák ví, že bílých ovcí je méně, ve druhém je černých méně a ve třetím případě jsou všechny ovce svázané po dvojicích k sobě, a tedy jsou obě stáda stejně početná. Ovčák nemá k dispozici pojmy, které by označovaly jednotlivé počty ovcí (nezná čísla), stejně jako člověk neobeznámený s teorií množin (nebo ten, který teorii množin teprve vytváří) nemá pojmy, které by označovaly jednotlivé počty prvků nekonečných množin (nezná kardinální čísla). Přesto však jsou oba schopni svá stáda resp. množiny porovnávat z hlediska velikosti, neboť k pouhému porovnání není třeba přesné velikosti znát.

Potenčná množina

Množina všetkých podmnožín množiny X sa nazýva potenčná množina, označujeme ju $P(X)$ alebo 2^X . Druhé z uvedených označení symbolicky vyjadruje najjednoduchší spôsob, ako generovať podmnožiny – vyrobiť podmnožinu X znamená prejsť postupne všetky prvky X a o každom rozhodnúť, či ho do podmnožiny vyberieme alebo nie. Teda dve možnosti pre každý z prvkov. Počet tých možností je $2^{|X|}$.

Cantorova veta

Pre každú množinu X platí, že mohutnosť množiny 2^X je väčšia ako mohutnosť množiny X .

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova_v%C4%9Bta

Mohutnosti bežných nekonečných množín

Mohutnosť množiny všetkých prirodzených čísel (bez nuly) $\mathbb{N}$ označíme $\aleph_0$ (alef nula). Množiny s rovnakou mohutnosťou ako prirodzené čísla budeme nazývať **nekonečné spočítateľné**.

Prakticky platí, že množina X je nekonečná spočítateľná, ak všetky jej prvky viem usporiadať a očíslovať prirodzenými číslami (tj. bijekcia medzi X a $\mathbb{N}$). Odtiaľ je aj odvodený názov "spočítateľná".

Množina všetkých podmnožín $\mathbb{N}$ má mohutnosť $2^{\aleph_0}$, ktorá je podľa Cantorovej vety väčšia než $\aleph_0$ a je zároveň rovnaká ako mohutnosť množiny reálnych čísel (tzv. mohutnosť kontinua, značená písmenom c). Stručne napísané, $c = 2^{\aleph_0}$.

Nekonečné množiny s mohutnosťou c nazývame **nespočítateľné**.

Množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{R}$ (reálne čísla) má mohutnosť 2^c , čo je viac ako c .

*

Najbližšia väčšia mohutnosť než $\aleph_0$ sa označuje $\aleph_1$. Hľadanie odpovede na otázku, či $c = \aleph_1$, je detektívka s otvoreným koncom. Kto má chuť, môže začať tu:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Hypot%C3%A9za_kontinua
https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

Riešené príklady

Vo vlastnom záujme skúste hľadať riešenie príkladov najprv samostatne (nepozerajte hneď na riešenie).

1. Aká je mohutnosť množiny $\mathbb{N}_0$ (prirodzené čísla s nulou)?

Riešenie:

Spárujeme prvky množiny $\mathbb{N}_0$ s modelovou množinou $\mathbb{N}$ takto:

$\mathbb{N}_0$:	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathbb{N}$:	1	2	3	4	5	6	7	...

Našli sme bijekciu, teda množina $\mathbb{N}_0$ je spočítateľná (presnejšie *nekonečná spočítateľná*, ale ak je tá nekonečnosť z kontextu zrejmá, môžeme ju z názvu vypustiť bez rizika nedorozumenia).

Vyzerá to ako podvod, v našej množine je o prvok viac a toto párovanie musí na konci "vybuchnúť". Iba žeby žiadneho konca vidieť nebolo – a to je naše šťastie. Niet toho konca, kde by to vybuchlo.

2. Aká je mohutnosť množiny všetkých párných prirodzených čísel (označíme $2\mathbb{N}$)?

Riešenie:

Bijekciu nastavíme takto:

$2\mathbb{N}$:	2	4	6	8	10	12	14	...
$\mathbb{N}$:	1	2	3	4	5	6	7	...

Množina $2\mathbb{N}$ je teda spočítateľná. Ľudovo povedané, párných prirodzených čísel je rovnako veľa ako všetkých prirodzených čísel. Komu to znie ako rúhanie, nech vydrží, bude to ešte hustejšie.

3. Aká je mohutnosť množiny $\mathbb{Z}$ všetkých celých čísel?

Riešenie:

Bijekciu nastavíme takto:

$\mathbb{Z}$:	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$\mathbb{N}$:	1	2	3	4	5	6	7	...

Množina $\mathbb{Z}$ je tiež spočítateľná. Celých čísel je rovnako veľa ako prirodzených čísel.

Kultúrna vsuvka:

Hilbertův hotel (text z wikipedie)

Následující příklad uváděl svým studentům David Hilbert, aby jim ukázal, že běžná intuice může při práci s aktuálním nekonečnem velmi klamat.

Představme si hotel s nekonečným (spočetným) počtem pokojů. Na vrátnici tohoto hotelu přijde člověk, který se chce ubytovat, všechny pokoje však jsou již obsazené. Recepční však hosta nepošle pryč. Zato si zavolá pokojskou a nakáže jí, aby obešla všechny pokoje a každého z hostů požádala, aby se přestěhoval do pokoje s číslem o jedna vyšším, než v jakém dosud bydlel. Poté, co hosté udělají vše podle pokynů pokojské, jsou opět všichni ubytováni, ale navíc se uvolnil pokoj s číslem 1, kam se nyní může nastěhovat nově příchozí. Dokud chodí na vrátnici vždy jen konečné skupinky lidí, je vše v pořádku – pokojská vždy požádá hosty, aby se odstěhovali do pokojů s číslem o několik vyšším a požadovaný počet pokojů s nejnižšími čísly zůstane volný pro nové hosty. Jednoho dne však na vrátnici tohoto hotelu přijde nekonečně (spočetně) mnoho lidí najednou a všichni se chtějí ubytovat. Vrátný si se vzniklou situací neví rady, a tak zavolá majitele hotelu, aby tolika rozzuřeným hostům vysvětlil, že pro ně v hotelu již není místo. Hoteliér však dostane nápad. Opět vyšle pokojskou, aby obešla všechny pokoje, ale tentokrát má za úkol hostům vyřídit, aby se přestěhovali do pokoje s číslem dvojnásobným oproti tomu, v němž bydleli dosud. Tím se uvolní všechny pokoje s lichými čísly a všichni noví hosté se mohou pohodlně nastěhovat.

<https://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4>

4. Množina A je konečná s n prvkami, množina B je nekonečná spočítateľná. Aká je mohutnosť množiny $A \cup B$?

Riešenie:

Bijekciu nastavíme takto:

AUB:	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n		b_1	b_2	b_3	...
N:	1	2	3	4	...	n		n+1	n+2	n+3	...

Množina $A \cup B$ je spočítateľná.

5. Množiny A, B sú nekonečné spočítateľné. Aká je mohutnosť množiny $A \cup B$?

Riešenie:

Ak sú množiny A, B spočítateľné, ich prvky sa dajú očíslovať poradovými číslami od 1 do nekonečna. To sme využili už v predošlom príklade. Bijekciu nastavíme takto (prvky z A, B na striedačku):

AUB:	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4	a_5	b_5	...
N:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

Vidíme, že skúmané zjednotenie je spočítateľné.

6. Množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú nekonečné spočítateľné.

Aká je mohutnosť množiny $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$?

Riešenie:

Bijekciu nastavíme podobne ako v predošlom príklade, len so štedrejšim striedaním. Prvky množiny A_k budeme značiť a_{ki} .

A:	a_{11}	$a_{21} \dots a_{n1}$	a_{12}	$a_{22} \dots a_{n2}$	a_{13}	$a_{23} \dots a_{n3}$	...
N:	1	2 ... n	n+1	n+2 ... 2n	2n+1	2n+2 ... 3n	...

Skúmané zjednotenie je spočítateľné.

7. Množiny $A_1, A_2, \dots, \dots$ sú nekonečné spočítateľné a je ich nekonečne spočítateľne veľa. Aká je mohutnosť množiny $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$?

Riešenie:

V záujme prehľadnosti budeme prvky množín označovať iba ich indexami, teda prvok st bude t -tý prvok v poradí z s -tej množiny (A_s). Usporiadame prvky do 2D štruktúry:

11	12	13	14	15	...
21	22	23	24	25	...
31	32	33	34	35	...
41	42	43	44	45	...
51	52	53	54	55	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Prvky tohto zjednotenia usporiadame a očísľujeme poradovými číslami takto:

N:	11	12	21	13	22	31	14	23	32	41	...
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

8. Aká je mohutnosť množiny racionálnych čísel $\mathbb{Q}$?

Riešenie:

Najprv zistíme mohutnosť množiny kladných racionálnych čísel $\mathbb{Q}^+$.

Ide o čísla, ktoré vieme vyjadriť ako zlomky celých čísel p/q .

Usporiadame tieto čísla do 2D štruktúry podobne ako v predošlom príklade a nebudeme sa spočiatku pozastavovať nad tým, že niektoré hodnoty sa opakujú ($1/3 = 2/6 = 3/9 \dots$). Bijekciu s množinou prirodzených čísel určíme "po uhlopriečkach" tak ako vyššie. Bude to spočítateľná množina.

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Teraz vyškrtáme všetky zlomky, ktoré sú nadbytočné (tj. dajú sa vykrátiť).

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2/1		2/3		2/5	...
3/1	3/2		3/4	3/5	...
4/1		4/3		4/5	...
5/1	5/2	5/3	5/4		...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Čísel teda bude menej (spočítateľnosť nepokazíme smerom hore). Napriek škrtaniu tam ale ostáva celý prvý stĺpec alebo riadok, takže sa ani pod nekonečnú spočítateľnosť nedostaneme. Je to teda nie viac a nie menej ako spočítateľné, teda akurát spočítateľné.

Ak je $\mathbb{Q}^+$ spočítateľné, s využitím doterajších poznatkov už vieme, že aj $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ musí byť spočítateľné.

Kultúrna vsuvka:

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

<https://www.youtube.com/watch?v=p1KkXA0vKsQ>

9. Nech A, B sú nekonečné spočítateľné. Aká je mohutnosť ich kartézského súčinu $A \times B$?

Riešenie:

Kartézsky súčin dvoch množín vieme vypísať v 2D tabuľke ako v predošlých 2 príkladoch. Tak ako v nich, aj tu poradové čísla usporiadaným dvojiciam prvkov budeme pridelovať "po uhlopriečkach". Kartézsky súčin A, B teda bude spočítateľný.

10. Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú nekonečné spočítateľné. Aká je mohutnosť ich kartézského súčinu $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$?

Riešenie:

Kartézsky súčin $A_1 \times A_2$ je spočítateľný, označíme ho B_2 .

Kartézsky súčin $B_2 \times A_3$ je spočítateľný, označíme ho B_3 .

Kartézsky súčin $B_3 \times A_4$ je spočítateľný, označíme ho B_4 .

...

Kartézsky súčin $B_{(n-1)} \times A_n$ je spočítateľný a presne to sme chceli vedieť.

Poznámka:

Ak je kartézsky súčin spočítateľných (nie nutne nekonečných) množín $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ spočítateľný, dajú sa jeho prvky zoradiť a očíslovať prirodzenými číslami. Nazvime jednu z možných bijekcií písmenom T_n ,

$$T_n: A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{N}$$

Je nám jedno, aký predpis sa za T skrýva, dôležité je, že aspoň jeden predpis T existuje.

10.* (len pre nadšencov) Akú mohutnosť má množina všetkých algebraických čísel?

Riešenie:

Algebraické čísla sú všetky korene polynómov konečného stupňa s celočíselnými koeficientami.

Nech x je v poradí k -tým koreňom polynómu p stupňa n s koeficientami $a_0, \dots, a_n$, pričom p je najmenší taký polynóm, že x je jeho koreň.

Hodnoty $k, n, a_0, \dots, a_n$ jednoznačne definujú hodnotu x (opačne to neplatí, x môže byť koreňom rôznych polynómov).

Označíme $p = T_{n+1}(a_0, \dots, a_n)$. Následne nájdeme číslo $T_3(k, n, p)$. Hotovo...

$T_3(k, n, T_{n+1}(a_0, \dots, a_n))$ je potrebná bijekcia na "spárovanie s prirodzenými číslami". Algebraických čísel je teda spočítateľne nekonečne veľa.

Poznámka: Sú aj iné spôsoby, ako úlohu riešiť. Nájdete na webe.

11. Je daný kartézsky súčin spočítateľne veľa dvojprvkových množín $\{0, 1\}$, tj.
 $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$

Aká je jeho mohutnosť?

Riešenie:

Na rozdiel od predošlého príkladu, v kartézskom súčine máme nekonečne veľa množín, ktoré sú však len dvojprvkové. Napriek tomu výsledok nebude spočítateľný. Doteraz nám všetko vychádzalo, tak už musel prísť moment, kedy sa to otočí.

Prvky uvedeného kart. súčinu sú nekonečné postupnosti núl a jednotiek. Predpokladajme naivne, že ich je spočítateľne veľa, teda že sa dajú nejak zoradiť a očíslovať, a zoradíme ich pod seba:

1.	x11	x12	x13	x14	x15	x16	
2.	x21	x22	x23	x24	x25	x26	
3.	x31	x32	x33	x34	x35	x36	
4.	x41	x42	x43	x44	x45	x46	
5.	x51	x52	x53	x54	x55	x56	
6.	x61	x62	x63	x64	x65	x66	
	:	:	:	:	:	:	:

Znak x_{ij} reprezentuje nulu alebo jednotku (nekonkretizujeme).

Spočítateľnosť znamená, že v tomto zozname sme schopní vypísať všetky postupnosti 0 a 1.

Problém je v tom, že aspoň jedna taká postupnosť tam nie je, a to je napr. táto:

x11' x22' x33' x44' x55' x66' ...

(tj. z vyššie uvedeného zoznamu postupností vyberieme diagonálu a hodnoty znegujeme).

Nie je tam, lebo od k -tej postupnosti sa líši v k -tej hodnote, pre každé k . Dostávame spor a teda náš naivný úvodný predpoklad sa ukazuje ako chybný. Kartézsky súčin zo zadania teda nie je spočítateľný.

Poznámka:

Každú z postupností 0 a 1 môžeme zapísať ako 0, $x_1x_2x_3x_4\dots$ (nula *celá* čísla postupnosti). V tejto podobe uvedené prvky kartézského súčinu predstavujú všetky reálne čísla v intervale $[0,1]$ zapísané v dvojkovej sústave. Fakticky sme teda ukázali, že reálny interval $[0,1]$ je nespočítateľný, má mohutnosť c .

Zhrnutie: <https://manybutfinite.com/post/counting-infinity/>

12. Nájdite bijekciu medzi reálnymi intervalmi $(0,1)$ a (a,b) .

Riešenie:

Interval $(0,1)$ je nekonečný nespočítateľný (mohutnosť c), ako sme ukázali v predošlom príklade (tam bol interval uzavretý, ale čo sú to dva body proti nekonečnu?). Nájdením bijekcie v tomto aj ďalších príkladoch ukážeme, že skúmané intervaly majú takisto mohutnosť c .

Bijekciu vieme vybaviť jednoduchým lineárnym predpisom (zaspomínajte si na MAT1):

$$f: (0,1) \rightarrow (a,b), \quad f(x) = a + (b-a) \cdot x$$

13. Nájdite bijekciu medzi reálnymi intervalmi (c,d) a (a,b) .

Riešenie:

Bijekciu vieme vybaviť analogicky ako vyššie:

$$f: (c,d) \rightarrow (a,b), f(x) = a + (b-a)/(d-c) \cdot (x-c)$$

14. Nájdite bijekciu medzi reálnymi intervalmi (c,d) a (a,∞) .

Riešenie:

Bijekciu musíme vybaviť nelineárnym predpisom. Možností je viac, uvedieme jednu, ktorá bude založená na funkcii $1/x$. Poskladáme to z troch funkcií:

$$f_1: (c,d) \rightarrow (0,1), \quad f_1(x) = (x-c) / (d-c)$$

$$f_2: (0,1) \rightarrow (1,\infty), \quad f_2(x) = 1/x$$

$$f_3: (1,\infty) \rightarrow (a,\infty), \quad f_3(x) = x-1+a$$

$$f(x) = 1/((x-c) / (d-c)) - 1 + a$$

$$= (d-c)/(x-c) - 1 + a$$

15. Nájdite bijekciu medzi reálnymi intervalmi (c, ∞) a $(-\infty, \infty)$.

Riešenie:

Aj túto bijekciu vybavíme nelineárnym predpisom, uvedieme jednu z viacerých možností.

$$f(x) = \ln(x-c)$$

16. Nájdite bijekciu medzi reálnymi intervalmi (a,b) a $(-\infty, \infty)$.

Riešenie:

Možností je viacero. Napr. zobrazit' (a,b) na $(-\pi/2, \pi/2)$ a potom tam poslať tangens.

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(\pi/(b-a) \cdot (x-a) - \pi/2 \right)$$

17. Nájdite bijekciu medzi reálnymi intervalmi $(0,1]$ a $(0,1)$.

Riešenie:

Je zrejmé, že obidva intervaly majú mohutnosť c . Ide tu teda výlučne o precvičenie hľadania bijekcií.

Nebyť toho bodu 1 "navyše" v prvom intervale, dalo by sa to vybaviť identickým zobrazením.

Z MAT1 pravdepodobne vieme, že spojitá bijektívna funkcia zobrazuje otvorený interval na otvorený a polouzavretý na polouzavretý. Preto hneď na začiatok si treba ujasniť, že hľadaná bijekcia nebude spojitá a tzv. vetvičkovému predpisu sa nevyhneme.

Funkcia $f(x) = x$ bude samozrejme základ, lebo zobrazí všetko pekne ako chceme, okrem bodu 1, ktorý tam je akosi navyše.

Keďže bod 1 nie je kam zobrazit', určíme direktívne, že $f(1) = 1/2$. Problém je vyriešený, za cenu nového problému – kam zobrazit' $1/2$? Vyriešime to opäť direktívne, bude $f(1/2) = 1/4$. A tak ďalej, $f(2^{-n}) = f(2^{-(n-1)})$.

Spravili sme dlh a miesto jeho splatenia ho budeme odsúvať ďalej až do nekonečna, lebo koniec, ktorý by si žiadal posledné zúčtovanie, tu nie je.

Výsledok je nasledovný:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{pre } x=2^{-n}, n=0, 1, 2, \dots \\ x & \text{pre ostatné } x \end{cases}$$

Neriešené príklady

1. Aká je mohutnosť množiny všetkých prvočísel?
2. Dokážte nájdením vhodnej bijekcie, že množina všetkých celých čísel deliteľných trojkou je spočítateľná.
3. Dokážte, že množina všetkých celých čísel deliteľných trojkou alebo sedmičkou je spočítateľná.
4. Dokážte, že množina všetkých komplexných čísel tvaru $\{p + qi ; p, q \in \mathbb{Q}\}$ je spočítateľná.
5. Dokážte, že množina všetkých reálnych čísel tvaru $\{p\sqrt{2} + q\sqrt{3} ; p, q \in \mathbb{Q}\}$ je spočítateľná.
6. Dokážte, že množina všetkých polynómov konečného stupňa s racionálnymi koeficientami je spočítateľná.
7. Nájdite bijekciu medzi intervalmi:
 - a) $(0,1)$ a $(7,8)$
 - b) $(0,1)$ a $(0,7)$
 - c) $(2,5)$ a $(7,11)$
 - d) $(-3,1)$ a $(2,8)$
 - e) $(1,5)$ a $(-5,2)$
 - f) $(-7, -3)$ a $(-2,7)$
8. Nájdite bijekciu medzi intervalmi:
 - a) $(0,1)$ a $(0,\infty)$
 - b) $(-3,7)$ a $(-2,\infty)$
 - c) $(-9,-5)$ a $(3,\infty)$
9. Nájdite bijekciu medzi intervalmi:
 - a) $(0, \infty)$ a $(-5,\infty)$
 - b) $(-\infty,7)$ a $(-2,\infty)$
 - c) $(-9,\infty)$ a $(-\infty,11)$
10. Nájdite bijekciu medzi intervalmi:
 - a) $(11, \infty)$ a $(-\infty,\infty)$
 - b) $(-\infty,7)$ a $(-\infty,\infty)$
 - c) $(-9,\infty)$ a $(-\infty,\infty)$
 - d) $(2,5)$ a $(-\infty,\infty)$
 - e) $(-9,5)$ a $(-\infty,\infty)$
- 11.* Nájdite bijekciu medzi intervalmi:
 - a) $(0,1]$, $[0,1]$
 - b) $(0,1)$, $[0,1]$
 - c) $(0,1]$, $(1,\infty)$
 - d) $[0, \infty)$, $(-\infty,\infty)$