

Dodatok k téme izomorfizmov a homomorfizmov. Jadro.

1. príklad

Je daná operácia $x \circ y = x + y - k(xy)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Zistite, či vôbec a pre akú množinu M je $(\mathbb{R} \setminus M, \circ)$ grupa.
- b) Nájdite aspoň jeden izomorfizmus $(\mathbb{R} \setminus M, \circ) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$, kde $*$ je bežné násobenie.

Riešenie:

a) Aby $\circ$ bola operácia, nie je potrebné množinu $\mathbb{R}$ obmedzovať. Pre reálne x, y bude aj $x \circ y$ reálne.

Asociatívnosť:

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x + y - kxy) \circ z = ((x + y - kxy) + z - k(x + y - kxy)z) = & x + y + z - k(xy + xz + yz) + kxyz \\ x \circ (y \circ z) &= & x + y + z - k(xy + xz + yz) + kxyz \end{aligned}$$

Neutrálny prvok:	$x + e - kxe = x$	pre ľubovoľné x
tj.	$e(1 - kx) = 0$	pre ľubovoľné x
preto	$e = 0$	

Inverzný prvok:	$x + x' - kxx' = 0$
	$x'(1 - kx) = -x$
	$x' = -x/(1 - kx)$

!!! Aby sme sa vyhli deleniu nulou, musí platiť $1 - kx \neq 0$, teda $x \neq 1/k$.

Bod $1/k$ musíme teda “zakázať”, treba však overiť, že sa tým nepokazí operácia. Je možné, aby pre nejaké x, y platilo

$$x + y - kxy = 1/k \quad ?$$

Upravíme:	$xy - (1/k)(x + y) + 1/k^2 = 0$
	$(x - 1/k)(y - 1/k) = 0$

Vidíme, že pokiaľ x aj y sa nerovnejú $1/k$, tak ani $x \circ y$ nemôže byť $1/k$. Je to v poriadku.

Záver: $(\mathbb{R} \setminus \{1/k\}, \circ)$ je grupa.

b) Nájsť izomorfizmus v tomto prípade nevieme inou cestou ako ho s trochou šťastia uhádnuť. Samozrejme, bude iba jedným z mnohých možných.

Pomôžeme si pritom preformulovaním predpisu operácie:

$$x + y - kxy = 1/k(1 - (1 - kx)(1 - ky))$$

Musí platiť:	$h(x \circ y) = h(x) * h(y)$
--------------	------------------------------

to znamená:	$h(1/k(1 - (1 - kx)(1 - ky))) = h(x) * h(y)$
-------------	--

Pozorný pohľad naznačí, že vyhovovať by mohol predpis $h(z) = 1 - kz$, ale radšej si to overme:

$$\begin{aligned} h(1/k(1 - (1 - kx)(1 - ky))) &= 1 - k \cdot 1/k(1 - (1 - kx)(1 - ky)) = & (1 - kx)(1 - ky) \\ h(x) * h(y) &= & (1 - kx)(1 - ky) \end{aligned}$$

Vyzerá to v poriadku, jeden z možných izomorfizmov je $h(z) = 1 - kz$.

2. príklad

Je daná grupa permutácií S_3 a zobrazenie $h: S_3 \rightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$,

$$\begin{array}{ll} h(I) = 0 & h((12)) = 1 \\ h((123)) = 0 & h((13)) = 1 \\ h((132)) = 0 & h((23)) = 1 \end{array}$$

Zistite, či je h homomorfizmus. Ak áno, uveďte dôsledky tejto skutočnosti.

Riešenie:

Overíme podľa definície, či je h homomorfizmus, teda či platí

$$h(p \circ q) = h(p) + h(q) \pmod{2}$$

Nebudeme skúšať všetkých 36 možností, stačí sa obmedziť na modelové prípady.

– ak $p = I$, potom má platiť	$h(I \circ q) = h(q)$ $h(I) + h(q) = 0 + h(q)$	OK
// analogicky $q = I$		
– ak $p = q = (12)$	$h((12) \circ (12)) = h(I) = 0$ $h((12)) + h((12)) = 1 + 1 = 0$	OK
// analog. $(13), (23)$		
– ak $p = (12), q = (13)$	$h((12) \circ (13)) = h(132) = 0$ $h((12)) + h((13)) = 0$	OK
// analog. iné kombinácie		
– ak $p = (12), q = (123)$	$h((12) \circ (123)) = h(23) = 1$ $h((12)) + h((123)) = 1$	OK
// analog. iné kombinácie, aj v opačnom poradí		
– ak $p = q = (123)$	$h((123) \circ (123)) = h(132) = 0$ $h((123)) + h((123)) = 0$	OK
// analog. pre (132)		
– ak $p = (123), q = (132)$	$h((123) \circ (132)) = h(I) = 0$ $h((123)) + h((132)) = 0$	OK
// analog. v opačnom poradí		

Záver: zobrazenie h je homomorfizmus. Jeho jadrom je množina $\{I, (123), (132)\}$ – keďže táto podmnožina S_3 je jadrom homomorfizmu, ide o normálnu podgrupu. Môžete si to overiť podľa Cayleyho tabuľky (v cvičení o permutáciách) alebo si spomenúť, že podmnožina párnych permutácií je vždy normálnou podgrupou.

Neriešené príklady

1.

Je daná množina permutácií $H = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$. Už vieme, že ide o normálnu podgrupu grupy A_4 .

Nájdite homomorfizmus $h: A_4 \rightarrow (\mathbb{Z}_3, +)$, ktorého jadrom bude H .

2.

Je daná množina permutácií $H = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$. Už vieme, že ide o normálnu podgrupu grupy S_4 .

Nájdite homomorfizmus $h: S_4 \rightarrow (\mathbb{Z}_6, +)$, ktorého jadrom bude H .

