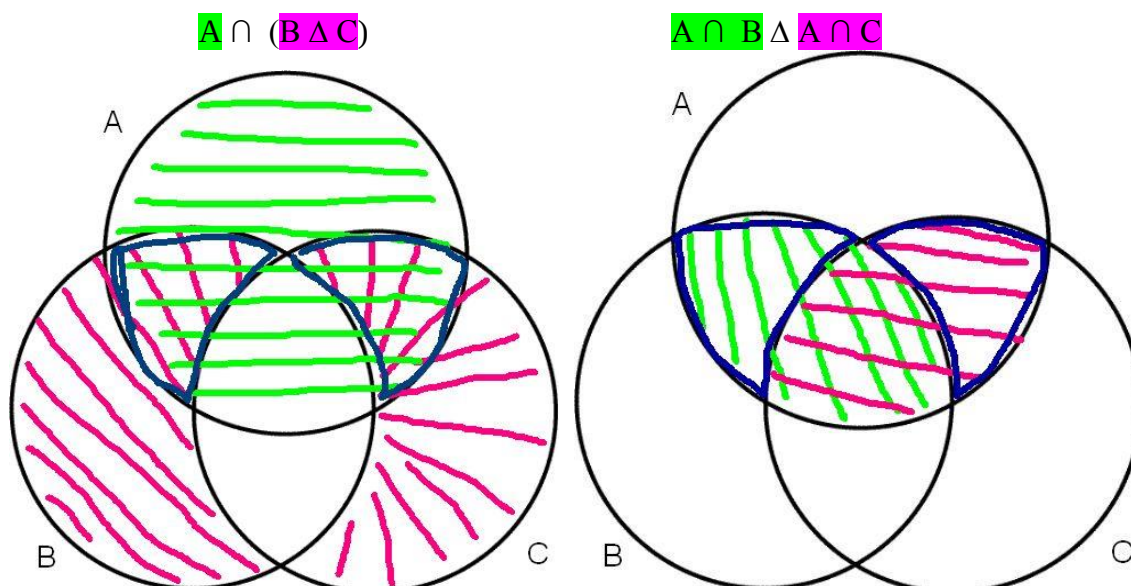


Okruhy a homomorfizmy, ideály

1. $R = 2^X$ je potenčná množina množiny X a Δ označuje symetrickú diferenciu. Klasifikujte štruktúru $(R, \Delta, \cap)$.

- a) (R, Δ) je kom. grupa, lebo
 Δ je oper., komutatívna, asociatívna, $E_0 = \emptyset$, $A' = A$ (dôkaz bol raz dávno na cviku)
- b) Distributívny zákon platí:



Modrou obtiahnuté plochy sú výsledkom – je rovnaký v oboch prípadoch.

- c) $(R, \cap)$ – operácia, kom., asoc., $E_1 = X$ (bolo dávno na cvikách).
 Delitele nuly sa nájdu (napr. dve disjunktné neprázdne množiny), takže je to “iba”
okruh s jednotkou.

2. R nech je množina ~~regulárnych~~ regulárnych matic 2×2 . Klasifikujte štruktúru $(R, +, *)$, kde $*$ je maticové násobenie.

V prípade regulárnych matic $+$ nie je operácia na R .

Ak vynecháme regulárnosť, $(R, +)$ je komut. grupa. Pri $(R, *)$ platí, že $*$ je asociatívna, ale nie komutatívna. Neutrálnym prvkom je jednotková matica.

Ide teda o okruh s jednotkou – viac nie, keďže napr. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Nech $D = [0, 2]$ je reálny interval, $P = \{0, 1, 2\}$ a R je množina spojitých funkcií na D . Definujeme zobrazenie $h(f) = f(P) = (f(0), f(1), f(2))$. Zistite, či $h: (R, +, *) \rightarrow (\mathbb{R}^3, +, *)$ (operácie $+$ a $*$ v cieľovej štruktúre fungujú „po zložkách“) je homomorfizmus.

Riešenie je rovnaké ako v príklade na cviku, len sa musí všetko konštatovať trojmo, pre každú zložku.

4. Nech $h: (\mathbb{R}^2, +, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +, *)$ je definované predpisom $h(x_1, x_2) = x_1$. Operácie $+$, $*$ vo východiskovej štruktúre fungujú „po zložkách“. Je h homomorfizmus?

Áno (riešenie je triviálne)

5. Nech $h: (\mathbb{Z}, +, *) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +, *)$ je definované predpisom $h(x) = m \cdot x \mid \text{mod } n$.
Pre aké dvojice m, n je h homomorfizmus? (skúste konkrétne príklady a potom zovšeobecnite).

So sčítaním nie je problém. Pri násobení máme:

$$\begin{aligned} h(xy) &= mxy \mid \text{mod } n \\ h(x)h(y) &= m^2 xy \mid \text{mod } n \end{aligned}$$

Musí teda platiť pre všetky x, y

$$mxy \mid \text{mod } n = m^2 xy \mid \text{mod } n$$

inými slovami $n \mid m^2 - m$.

Takže napríklad pre $m = 6$ bude zobrazenie homomorfizmom pri $n = 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15$.

6. Nech $(C(\mathbb{R}), +, *)$ sú spojité reálne funkcie a $I = \{f \in C(\mathbb{R}); \exists m \in \mathbb{R}^+, \forall x, |x| \geq m: f(x) = 0\}$.
Zistite či je I ideál v $C(\mathbb{R})$.

Je (triviálne).