

Voľné grupy

1. Zostrojte G ako prezentáciu voľnej grupy s potrebným počtom generátorov a vhodnými reláciami.

a) $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$

b) $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, +)$

a) $F_R = \langle \{a, b\}, a^2=e, b^3=e, aba^{-1}b^{-1}=e \rangle$

$h: F_R \rightarrow (\mathbb{Z}^2, +), h(a) = (1, 0), h(b) = (0, 1).$

b) $F_R = \langle \{a, b, c\}, a^2=e, b^3=e, c^5=e, aba^{-1}b^{-1}=e, aca^{-1}c^{-1}=e, cbc^{-1}b^{-1}=e \rangle$

$h: F_R \rightarrow (\mathbb{Z}^3, +), h(a) = (1, 0, 0), h(b) = (0, 1, 0), h(c) = (0, 0, 1).$

Uvedené riešenie nie je jediné možné.

2.* Zostrojte S_3 a S_4 ako prezentáciu voľnej grupy s čo najmenším počtom generátorov a s vhodnými reláciami.

Riešenie pre S_3 .

Pripomenieme si tabuľku pre S_3 :

	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
I	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	I	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	I	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	I	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	I
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	I	(123)

Grupa nie je cyklická, na jej generovanie bude treba aspoň dva generátory. Krátke skúšanie ukazuje, že napr. dvojica $a = (123)$ a $b = (12)$ vyhovujú – ide o rotáciu trojuholníka a jeho zrkadlové preklopenie, čím získame všetky možné symetrické obrazy.

Podľa tabuľky vidíme, že $aa = (132)$, $ab = (13)$, $ba = (23)$, teda sme pohodlne vygenerovali všetky ostatné permutácie. Napíšeme si znovu tabuľku grupy, kde jednotlivé permutácie nahradíme ich generujúcim predpisom:

	e	b	ab	ba	a	aa
e	e	b	ab	ba	a	aa
b	b	e	aa	a	ba	ab
ab	ab	a	e	aa	b	ba
ba	ba	aa	a	e	ab	b
a	a	ab	ba	b	aa	e
aa	aa	ba	b	ab	e	a

Teraz už ostáva len skontrolovať 36 rovníc daných tabuľkou.

Predovšetkým neprekvapujú výsledky skladania s neutrálnym prvkom.

Niektoré výsledky sú jednoduchým zložením vstupných hodnôt bez úprav.

Rovnako sa dalo očakávať, že $b^2=bb=e$ a podobne $a^3=aaa=e$. Na základe toho rozumieme viacerým ďalším výsledkom.

Ostalo niekoľko výsledkov, ktoré treba preskúmať podrobnejšie. (Nevypisujeme opakujúce sa prípady.)

$bab=aa$, $baba=e$, $baa=ab$, $baab=a$, $aba=b$, $abab=e$, $abaa=ba$, $aaba=ab$, $abab=e$, $aab=ba$

Pozorná analýza ukazuje, že všetky uvedené rovnosti sú navzájom ekvivalentné. Vyberme ako ich reprezentanta tvrdenie $aba=b$ a ukážeme, ako z neho dostať tie ostatné násobením zľava a sprava vhodnými hodnotami.

$$aba = b$$

$$b \text{ } aba \text{ } aa = b \text{ } b \text{ } aa \quad \rightarrow \quad bab = aa$$

$$b \text{ } aba = b \text{ } b \quad \rightarrow \quad baba = e$$

$$aba \text{ } aa = b \text{ } aa \quad \rightarrow \quad ab = baa$$

$$aba \text{ } aab = b \text{ } aab \quad \rightarrow \quad a = baab$$

$$aba \text{ } b = b \text{ } b \quad \rightarrow \quad abab = e$$

$$aba \text{ } a = b \text{ } a \quad \rightarrow \quad abaa = ba$$

$$a \text{ } aba = a \text{ } b \quad \rightarrow \quad aaba = ab$$

$$aba \text{ } b = b \text{ } b \quad \rightarrow \quad abab = e$$

$$aa \text{ } aba = aa \text{ } b \quad \rightarrow \quad ba = aab$$

Na definíciu príslušnej relácie použijeme vhodnejší ekvivalentný zápis $abab = e$.

Ako predobraz S_3 teda môžeme vziať voľnú grupu s dvojicou generátorov a nasledujúcimi reláciami:

$$F_R = \langle \{a,b\}, a^3 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e \rangle$$

Pre S_4 je postup podobný, ale niekoľkonásobne zdĺhavejší. Grupy je možné generovať takisto pomocou dvoch generátorov (napr. otočenie o $\pi/2$ okolo osi x a okolo y).

Okruhy

Klasifikujte nasledujúce množiny s dvojicou operácií:

1. $(C([0,1]), +, *)$ // spojité funkcie na uzavretom intervale $[0,1]$

a) $(C([0,1]), +)$

Súčet 2 spojitých funkcií na danom intervale je spojitá funkcia na rovnakom intervale.

Súčet funkcií je komutatívny aj asociatívny.

Neutrálly prvok $e_0 = 0$ (konštantná nula na danom intervale).

Inverzný prvok je $-f$.

b) Distributívny zákon platí (bolo na MAT1-2)

c) $(C([0,1]), *)$

Súčin spojitých funkcií na danom intervale je spojitá funkcia na rovnakom intervale.

Komutatívnosť a asociatívnosť platia.

Neutrálly prvok $e_1 = 1$ (konštantná jednotka na danom intervale).

Delitele nuly – napr. nasledujúca dvojica f, g (nakreslite si obrázok):

$$f = \begin{cases} 0 & \text{na } [0, 0.5] \\ x-0.5 & \text{na } [0.5, 1] \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} -x+0.5 & \text{na } [0, 0.5] \\ 0 & \text{na } [0.5, 1] \end{cases}$$

Záver – daná štruktúra je komutatívny okruh s jednotkou.

2. $(Q_V, +, *)$, kde $Q_V = \{a+b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$

a), b), c) – ako na cvičení, okrem poslednej úrovne:

Inverzný prvok ku $a+b\sqrt{2}$ pri operácii $*$:

$$(a+b\sqrt{2})^{-1} = 1/(a+b\sqrt{2}) = 1/(a+b\sqrt{2}) * (a-b\sqrt{2}) / (a-b\sqrt{2}) = (a-b\sqrt{2}) / (a^2 - 2b^2)$$

Daná štruktúra je pole.

3. $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$, kde $a \oplus b = ab = e^{(\ln a + \ln b)}$, $a \odot b = e^{(\ln a * \ln b)}$

!!! Treba dôsledne rozlišovať Eulerovu konštantu e od neutrálnych prvkov e_0 a e_1 .

- a) $(\mathbb{R}^+, \oplus)$ $a \oplus b = ab$ patrí do $\mathbb{R}^+$, je to operácia.
Komutatívnosť a asociatívnosť sú zrejmé.
 $e_0 = 1$
Inverzný ku prvku a je $1/a$.

- b) Distributívny zákon:

$$(a \oplus b) \odot c = e^{(\ln a + \ln b)} \odot c = e^{((\ln a + \ln b) * \ln c)}$$

$$a \odot c \oplus b \odot c = e^{(\ln a * \ln c)} \oplus e^{(\ln b * \ln c)} = e^{(\ln a * \ln c + \ln b * \ln c)}$$

Rovnosť oboch výrazov je po uvedených úpravách zrejmá.

- c) $(\mathbb{R}^+, \odot)$

Je to operácia, keďže $e^{(\ln a * \ln b)}$ dáva výsledok do východiskovej množiny
Komutatívnosť je zrejmá.

Asociatívnosť:

$$(a \odot b) \odot c = e^{(\ln(a \odot b) * \ln c)} = e^{(\ln(e^{(\ln a * \ln b)}) * \ln c)} = e^{(\ln a * \ln b * \ln c)}$$

$$a \odot (b \odot c) = \dots = e^{(\ln a * \ln b * \ln c)}$$

Neutrálly prvok:

$$\begin{aligned} a \odot e_1 &= a \\ e^{(\ln a * \ln e_1)} &= e^{(\ln a)} \\ \ln a * \ln e_1 &= \ln a \\ \ln e_1 &= 1 \\ e_1 &= e \end{aligned}$$

Inverzný prvok:

$$\begin{aligned} a \odot a^{-1} &= e \\ e^{(\ln a * \ln a^{-1})} &= e^1 \\ (\ln a * \ln a^{-1}) &= 1 \\ \ln a^{-1} &= 1/\ln a \\ a^{-1} &= e^{(1/\ln a)} \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^+_{\{1\}}, \odot)$ je komutatívna grupa. Dôsledkom je aj neexistencia deliteľov nuly.

Záver: $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je pole.