

1. Nájdite ľavý a pravý rozklad S_3 podľa $H_{23} = \{I, (23)\}$. Je H_{23} normálna?

L:	$T_0 = H_{23} = \{I, (23)\}$	P:	$T_0 = H_{23} = \{I, (23)\}$
	$T_1 = \{(12), (123)\}$		$T_1 = \{(12), (132)\}$
	$T_2 = \{(13), (132)\}$		$T_2 = \{(13), (123)\}$

Nie je normálna.

2. Je daná množina permutácií $H = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

a) Nájdite ľavé a pravé rozklady S_4 podľa H .

d) Vyjadrite sa k normálnosti H ako podgrupy S_4 .

b) H je normálna podgrupa, ľavý a pravý rozklad sú zhodné.

- a)
- $$T_0 = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = H$$
- $$T_1 = \{(123), (134), (243), (142)\}$$
- $$T_2 = \{(132), (143), (234), (124)\}$$
- $$T_3 = \{(12), (34), (1324), (1423)\}$$
- $$T_4 = \{(13), (24), (1234), (1432)\}$$
- $$T_5 = \{(14), (23), (1243), (1342)\}$$

3. Nájdite ľavé a pravé rozklady S_4 podľa S_3 . Je S_3 normálna podgrupa?

S_3 nie je normálna podgrupa.

L:	$T_0 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\} = S_3$
	$T_1 = \{(14), (124), (134), (14)(23), (1234), (1324)\}$
	$T_2 = \{(24), (142), (234), (13)(24), (1423), (1342)\}$
	$T_3 = \{(34), (143), (243), (12)(34), (1243), (1432)\}$
P:	$T_0 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\} = S_3$
	$T_1 = \{(14), (142), (143), (14)(23), (1423), (1432)\}$
	$T_2 = \{(24), (124), (243), (13)(24), (1243), (1324)\}$
	$T_3 = \{(34), (134), (234), (12)(34), (1234), (1342)\}$

4. Nájdite grupu H všetkých zobrazení štvorca do seba. Je H normálnou podgrupou S_4 ? Určte ľavý a pravý rozklad S_4 podľa H . Je H izomorfná s nejakou “známou” grupou?

1	2
4	3

Každé zobrazenie jednoznačne identifikujeme bodom, kam sa presunie vrchol 1 (štyri možnosti) a bodom, kde pristane vrchol 2 (dve možnosti) – spolu je to 8 možností.

$$H = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432) \}$$

– identita
 – súmernosti podľa zvislej a vodorovnej osi + stredová súmernosť
 – súmernosti podľa uhlopriečok
 – rotácie o $\pi/2$ vpravo a vľavo

Grupa H nemá komutatívnu operáciu, takže medzi doteraz preberanými grupami izomorfný obraz nenájdeme. Rozklady zľava a sprava sa líšia, H nie je normálna.

L: $T_0 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432) \} = H$
 $T_1 = \{ (12), (34), (1324), (1423), (132), (124), (234), (143) \}$
 $T_2 = \{ (14), (23), (1243), (1342), (123), (142), (243), (134) \}$

P: $T_0 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432) \} = H$
 $T_1 = \{ (12), (34), (1324), (1423), (123), (142), (134), (243) \}$
 $T_2 = \{ (14), (23), (1243), (1342), (132), (124), (234), (143) \}$

5. Nájdite všetky netriviálne podgrupy A_4 . Ktoré z nich sú normálne?

Podgrupy sú uvedené typologicky (za a,b,c,d sa dosadia čísla 1,2,3,4 v rozličných poradiach).

Typ $\{I, (ab)(cd)\}$ – 3 možnosti
 Typ $\{I, (abc), (acb)\}$ – 4 možnosti
 $\{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ – iba táto podgrupa je normálna

6. Nájdite všetky netriviálne cyklické podgrupy S_4 . Ktoré z nich sú normálne?

Typ $\{I, (ab)\}$ – 6 možností
 Typ $\{I, (ab)(cd)\}$ – 3 možnosti
 Typ $\{I, (abc), (acb)\}$ – 4 možnosti
 Typ $\{I, (abcd), (ac)(bd), (adcb)\}$ – 3 možnosti
 Žiadna z uvedených podgrúp nie je normálna (skúsime a vidíme).

Porov.:

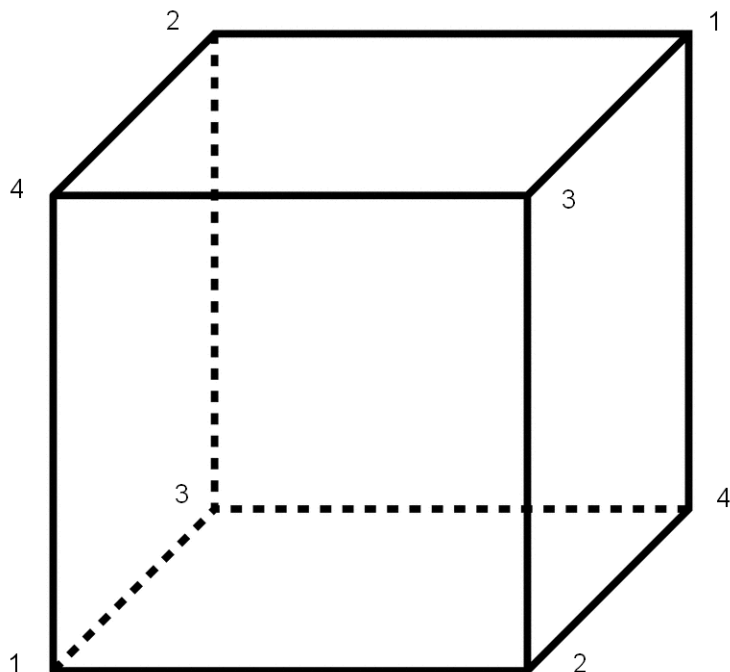
artax.karlin.mff.cuni.cz/~ppri7485/grupy/podgrupy_s4.pdf

https://en.wikiversity.org/wiki/Symmetric_group_S4

www.math.hawaii.edu/~williamdemeo/groups/S4Subgroups.pdf

7.* Nájďte grupu K všetkých rotácií kocky (zobrazení do seba bez zrkadlových obrazov). Zistite, či je izomorfná s S_4 .

Kľúčom k izomorfizmu je nasledujúce označenie vrcholov kocky:



Vo východzej pozícii sa pozeráme na prednú stenu s vrcholmi 1,2,3,4 v poradí a umiestnení ako na obrázku. Rotáciou kocky sa myslí otáčanie kocky podľa osí x, y, z (aj násobné a kombinované) a jej následné umiestnenie tak, aby sme sa pozerali na novú prednú stenu. Číslovanie vrcholov je zvolené tak, že každá stena a každé z jej 4 možných otočení má svoj jedinečný kód daný štvoricou čísel čítaných po rade z pozícií, kde pôvodne stáli 1,2,3,4. 24 rozličných polôh kocky teda kódujeme 24 permutáciami z S_4 .

Otázkou je, či skladanie rozličných rotácií kocky povedie k rovnakým výsledkom ako skladanie permutácií kódujúcich tieto rotácie. Odpoveď je kladná, tu sa však obmedzíme len na zbežné “ohmatanie” vecí.

Základné rotácie:

p / Pravá stena kocky sa stane čelnou (rotácia okolo zvislej osi o $\pi/2$):

1 2 3 4
2 4 1 3

V cykloch: $p = (1243)$

p² / Zadná stena kocky sa stane čelnou (rotácia okolo zvislej osi o π):

1 2 3 4
4 3 2 1

V cykloch: $p^2 = (14)(23)$

p³ / Ľavá stena kocky sa stane čelnou (rotácia okolo zvislej osi o $3\pi/2$):

1 2 3 4
3 1 4 2

V cykloch: $p^3 = (1342)$

$p^4 = I$

Postupná rotácia okolo zvislej osi je v súlade s postupným umocňovaním príslušnej permutácie.

d / Dolná stena kocky sa stane čelnou (rotácia okolo ľavopravej osi o $\pi/2$):

1 2 3 4
3 4 2 1

V cykloch: $d = (1324)$

d² / Zadná stena kocky sa stane čelnou (rotácia okolo zvislej osi o π):

1 2 3 4
2 1 4 3

V cykloch: $d^2 = (12)(34)$

d³ / Horná stena kocky sa stane čelnou (rotácia okolo zvislej osi o $3\pi/2$):

1 2 3 4
4 3 1 2

V cykloch: $d^3 = (1423)$ – inverzné k p !!

$d^4 = I$

Postupná rotácia okolo pravoľavej osi je v súlade s postupným umocňovaním príslušnej permutácie.

Rovnakým spôsobom môžeme (ale nemusíme) overiť rotácie okolo predozadnej osi. Samotná dvojica rotácií/permutácií p a d stačí na generovanie všetkých 24 možných rotácií kocky / 24 prvkov S_4 .