

- a) Nájdite rozklad G podľa H .
- b) Ako vyzerá grupa vhodných reprezentantov jednotlivých tried?
- c) Určte rozklad G podľa G/H alebo vhodnej grupy izomorfnej s G/H .

Uvedené sú riešenia pre úlohy a), b). Riešenia úloh c) sú naznačené iba v niekoľkých príkladoch, keďže nie sú ťažké a predstavujú väčšinou (nie vždy!) obrátený obraz úloh a).

1. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +), H = (3\mathbb{Z}_4, +).$

- a) $T_0 = H + 0 = \{0, 3, 6, 9\},$
 $T_k = H + k, k = 0, 1, 2$
- b) $(\mathbb{Z}_3, +)$
- c) $G/(4\mathbb{Z}_3, +)$ bolo na cv.

2. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +), H = (6\mathbb{Z}_2, +).$

- a) $T_0 = H + 0 = \{0, 6\},$
 $T_k = H + k, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- b) $(\mathbb{Z}_6, +)$
- c) $G/(2\mathbb{Z}_6, +)$
 $T_0 = 2\mathbb{Z}_6 + 0,$
 $T_1 = 2\mathbb{Z}_6 + 1$

3. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +), H = (2\mathbb{Z}_6, +).$

príklad 2 naruby

4. $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$, H – postupne všetky netrivi. podgrupy G .

Tých podgrúp je veľa... prvky (dvojice čísel) sú kvôli úspornosti písané bez zátvoriek.
Tu riešime len úlohy a, b. Časť c sa dá tiež, ale kto by to sem písal...

$$H = [01] = \{ 01\ 02\ 03\ 04\ 05\ 00 \}$$

$$T_k = H + k0, k = 0, 1, 2, 3 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_0$$

$$H = [02] = \{ 02\ 04\ 00 \}$$

$$T_{km} = H + km, k = 0, 1, 2, 3, m = 0, 1 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$$

$$H = [03] = \{ 03\ 00 \}$$

$$T_{km} = H + km, k = 0, 1, 2, 3, m = 0, 1, 2 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$$

$$H = [11] = \{ 11\ 22\ 33\ 04\ 15\ 20\ 31\ 02\ 13\ 24\ 35\ 00 \}$$

$$T_k = H + k0, k = 0, 1 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_0$$

$$H = [12] = \{ 12\ 24\ 30\ 02\ 14\ 20\ 32\ 04\ 10\ 22\ 34\ 00 \}$$

$$T_k = H + kk, k = 0, 1 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$H = [13] = \{ 13\ 20\ 33\ 00 \}$$

$$T_k = H + 0k, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_6$$

$$H = [2\ 1] = \{ 21\ 02\ 23\ 04\ 25\ 00 \}$$

$$T_k = H + k0, k = 0, 1, 2, 3 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_0$$

$$H = [2\ 2] = \{ 22\ 04\ 20\ 02\ 24\ 00 \}$$

$$T_{km} = H + km, k, m = 0, 1 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$H = [2\ 3] = \{ 23\ 00 \}$$

$$T_{km} = H + km, k = 0, 1, m = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad // \quad \sim \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$$

5. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$.

a) $T_k = H + k, k \in [0, 1)$

b) $([0, 1), +/\text{frac})$ $/\text{frac}$ = desatinná časť čísla

$$6. \quad G = (\mathbb{Q}, +), \quad H = (\mathbb{Z}, +).$$

- a) $T_k = H + k, k \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$
- b) $([0,1) \cap \mathbb{Q}, +_{\text{frac}})$

$$7. \quad G = (\mathbb{C}, +), \quad H = (\mathbb{R}, +).$$

- a) $T_k = H + ik, k \in \mathbb{R}$
- b) $(\mathbb{R}, +)$

$$8. \quad G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +), \quad H = (\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}, +).$$

- a) $T_{kl} = H + (k, 2m), k, m \in [0,1)$
- b) $([0,1) \times [0,1), +_{\text{frac}})$

$$9. \quad G = (\mathbb{C}_{\setminus \{0\}}, *), \quad H = (\mathbb{R}^+, *). \quad \text{Operácia } * \text{ je bežné násobenie (aj ďalej).}$$

- a) $T_k = H * \exp(i2\pi k), k \in [0,1)$
- b) $([0,1), +_{\text{frac}})$

$$10. \quad G = (\mathbb{C}_{\setminus \{0\}}, *), \quad H = (\{c \in \mathbb{C}, c^6 \in \mathbb{R}\}, *).$$

- a) $T_k = H * \exp(i2\pi k/6), k \in [0,1)$
- b) $([0,1), +_{\text{frac}})$

$$11. \quad G = (\{c \in \mathbb{C}, c^{12} = 1\}, *), \quad H = (\{c \in \mathbb{C}, c^4 = 1\}, *).$$

- a) $T_k = H * \exp(i2\pi k/12), k = 0, 1, 2$
- b) $(\mathbb{Z}_3, +)$

$$12. \quad G = (\{c \in \mathbb{C}_{\setminus \{0\}}, c^{99} \in \mathbb{R}\}, *), \quad H = (\mathbb{R}^+, *).$$

- a) $T_k = H * \exp(i2\pi k/99), k = 0, 1, 2, \dots, 98$
- b) $(\mathbb{Z}_{99}, +)$

$$13. \quad G = (\mathbb{C}_{\setminus \{0\}}, *), \quad H = (\{c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}, *).$$

- a) $T_k = H * k, k \in \mathbb{R}^+$
- b) $(\mathbb{R}^+, *)$