

-
1. Nájdite všetky podgrupy grúp $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ a $(\mathbb{Z}_{11 \setminus \{0\}}, *)$. Nájdite všetky izomorfizmy medzi oboma grupami.

$\mathbb{Z}_{10}$:

Generátory grupy:

1, 3, 7, 9 (čísla nesúdeliteľné s 10)

Generátory netriviálnych podgrúp:

$\text{NSD}(x, n) = 2$ máme pre $x = 2, 4, 6, 8$, tieto čísla budú generovať podgrupu $(2\mathbb{Z}_5, +)$

$\text{NSD}(x, n) = 5$ máme pre $x = 5$, tieto čísla budú generovať podgrupu $(5\mathbb{Z}_2, +)$

$\mathbb{Z}_{11 \setminus \{0\}}$:

Generátory grupy:

2, 6, 7, 8

Generátory netriviálnych podgrúp:

$x=3, 4, 5, 9$ generujú $\{3, 9, 5, 4, 1\}$

$x=10$ generuje $\{10, 1\}$

Izomorfizmy sú jednoznačne určené zobrazením generátora na generátor. V tomto prípade sú 4 možnosti zobrazenia $\mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_{11 \setminus \{0\}}$:

$$1 \rightarrow 2, 6, 7, 8$$

2. To isté pre $(\mathbb{Z}_{16}, +)$ a $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, *)$

$\mathbb{Z}_{16}$:

Generátory grupy:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 (čísla nesúdeliteľné so 16)

Generátory netrív. podgrúp:

$\text{NSD}(x, n) = 2$ máme pre $x = 2, 6, 10, 14$, tieto čísla budú generovať podgrupu $(2\mathbb{Z}_8, +)$

$\text{NSD}(x, n) = 4$ máme pre $x = 4, 12$, tieto čísla budú generovať podgrupu $(4\mathbb{Z}_4, +)$

$\text{NSD}(x, n) = 8$ máme pre $x = 8$, tieto čísla budú generovať podgrupu $(8\mathbb{Z}_2, +)$

$\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}$:

Generátory grupy:

3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14

Generátory netrív. podgrúp:

$x = 2, 8, 9, 15$ generujú $\{2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 15 \ 13 \ 9 \ 1\}$

$x = 4, 13$ generujú $\{4 \ 16 \ 13 \ 1\}$

$x = 16$ generuje $\{16 \ 1\}$

Izomorfizmov je 8: $1 \rightarrow 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14$

3. Nájdite najmenšiu množinu J takú, že $(\mathbb{Z}_9 \setminus J, *)$ bude cyklická grupa. Nájdite všetky jej podgrupy a uveďte príklady grúp, ktoré sú s $(\mathbb{Z}_9 \setminus J, *)$ izomorfné.

Ľahko overíme, že prvky 0, 3, 6 generujú o.i. aj nulu. Musíme ich vylúčiť. Zvyšné čísla sú pri danej operácii v poriadku, operácia je na množine uzavretá a ide o cyklickú grupu

$(\{2, 4, 8, 7, 5, 1\}, *_{\text{mod } 9})$ – poradie prvkov uvedené pri generovaní číslom $x=2$

Grupa je cyklická, má 6 prvkov, je teda izomorfná so $(\mathbb{Z}_6, +)$ a ďalšími grupami, ktoré sa spomínali na cvičení.

4. Nájdite všetky podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, +)$ a všetky izomorfizmy s $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Celú grupu generujú

$(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)$

Netriv. podgrupy generujú prvky:

$(1, 0), (2, 0)$	–	3 prvky
$(0, 1), (0, 3)$	–	4 prvky
$(0, 2)$	–	2 prvky
$(1, 2), (2, 2)$	–	6 prvkov

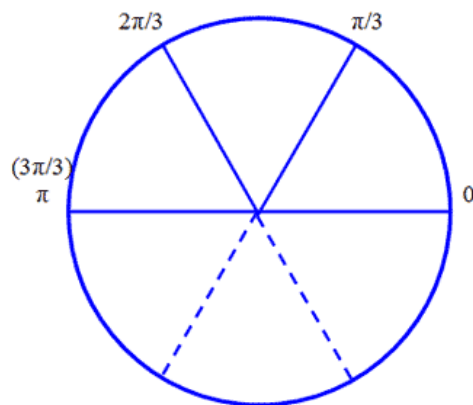
Izomorfizmy: $1 \rightarrow (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)$

5. Nájdite všetky podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$ a všetky izomorfizmy s $(\mathbb{Z}_8, +)$.

Grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$ nie je cyklická, izomorfizmy by sme hľadali márne.

6. Je daná grupa $S = (\{z \in \mathbb{C}, z^6 = 1\}, *)$. Je cyklická? Nájdite všetky jej podgrupy a nakreslite ich (!!).

Ide o prvky $z = \exp(i2\pi k/6)$, kde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Je izomorfná so $(\mathbb{Z}_6, +)$ a teda cyklická. V komplexnej rovine ide o body na kružnici, ktorej stred je 0 (na obr. sú hodnoty argumentov):



Detaily riešenia iste zvládne každý sám.

7. Je daná grupa $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, jej 3-prvková podgrupa K a štvorprvková L . Ako vyzerajú triedy $5+K$ a $5+L$? Nájdite všetky triedy generované podgrupami K, L .

$K = \{0, 4, 8\}$, triedy sú

$K+0 = \{0, 4, 8\}$	
$K+1 = \{1, 5, 9\}$	
$K+2 = \{2, 6, 10\}$	
$K+3 = \{3, 7, 11\}$	(ďalej sa to už cyklí)

$L = \{0, 3, 6, 9\}$, triedy sú

$L+0 = \{0, 3, 6, 9\}$	
$L+1 = \{1, 4, 7, 10\}$	
$L+2 = \{2, 5, 8, 11\}$	(ďalej sa to už cyklí)