

Príklady

Poznámka: Z praktických dôvodov sú matice zapísané v Matlabovskej konvencii.

1. Je daná grupa G regulárnych matic 2×2 s operáciou matic. násobenia $*$ a množina $H = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \}$. Overte, či platí $(H, *) \subset (G, *)$.

Riešené na cvičení.

2. Je daná grupa G regulárnych matic 2×2 s operáciou matic. násobenia $*$ a množina $H = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ a } b \neq 0 \}$. Overte, či platí $(H, *) \subset (G, *)$.

Postup rovnaký ako v 1.

3. Nech $H = \{m/n; m, n \text{ sú prirodzené nepárne}\}$. Dokážte, že $(H, *) \subset (\mathbb{Q}_{\setminus\{0\}}, *)$.

Operácia: $(m/n) * (p/q) = (mp)/(nq)$. Súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.

Asoc.: násobenie je asoc.

Neutr.: $e=1 = \text{napr. } 1/1$

Inv.: n/m

$(H, *)$ je grupa a teda podgrupa $(\mathbb{Q}_{\setminus\{0\}}, *)$.

4. a) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_6, +)$
b) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_8, +)$
c) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_{12}, +)$
d) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_{30}, +)$
e) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$
f) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$

Vypíšeme len samotné množiny netriviálnych podgrúp.

- a) $\{0, 2, 4\}$ $\{0, 3\}$
b) $\{0, 2, 4, 6\}$ $\{0, 4\}$
c) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ $\{0, 3, 6, 9\}$ $\{0, 4, 8\}$ $\{0, 6\}$
d) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}$ $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$
 $\{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ $\{0, 6, 12, 18, 24\}$ $\{0, 10, 20\}$ $\{0, 15\}$
e) $\{(00), (01)\}$ $\{(00), (10)\}$ $\{(00), (11)\}$
f) $\{(00), (01), (02)\}$ $\{(00), (10)\}$

5. Nájdite čo najmenšiu grupu s operáciou maticového násobenia, ktorá obsahuje prvok:
- $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

6. Je daná množina $S = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$. Zistite, či $(S, *)$ je podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$.

Prvky množiny S zapíšeme v exp. tvare:

$$S = \{z \in \mathbb{C}, z = \exp(i\varphi), \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

Dôkaz toho, že $(S, *)$ je grupa, sa urobí konštatovaním evidentnej platnosti potrebných tvrdení.

7. Je daná množina $S = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$ a zobrazenie $h: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (S, *)$ dané predpisom $h(x) = \exp(i2\pi x)$.

- Dokážte, že h je homomorfizmus.
- Nájdite jadro operácie h a dokážte, že je (s operáciou $+$) podgrupou $(\mathbb{R}, +)$.

- $h(x+y) = \exp(i2\pi(x+y)) = \exp(i2\pi x) * \exp(i2\pi y) = h(x) * h(y)$
- Neutr. prvok cieľovej grupy je 1. Rovnosť $\exp(i2\pi x) = 1$ platí pre všetky celé x . Jadrom zobrazenia je teda $\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}, +)$ je evidentne podgrupou $(\mathbb{R}, +)$ – dôkaz azda zvláda každý.

8. Je dané pevné prirodzené číslo n a množina $S = \{z \in \mathbb{C}, z^n \in \mathbb{R}^+\}$. Zistite, či $(S, *)$ je podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$.

Prvky množiny S zapíšeme v exp. tvare:

$$S = \{z \in \mathbb{C}, z = t * \exp(i2\pi\varphi), \varphi = k/n, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

Operácia: $t * \exp(i2\pi\varphi) * u * \exp(i2\pi\psi) = tu * \exp(i2\pi(\varphi + \psi)) =$
 $= tu * \exp(i2\pi(k/n + l/n)) = tu * \exp(i2\pi(k+l)/n)$

Asoc., neutr., inv. sú evidentné.

-
1. Nech $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$. Definujeme $H = \{x \in G, a^{\circ}x = x^{\circ}a\}$. Dokážte, že $(H, \circ)$ je podgrupou $(G, \circ)$.

Operácia: Nech $ax = xa$ a $ay = ya$

Asoc. Potom $axy = xay = xya$ a teda xy tiež patrí do H .

Neutr. Operácia to má "v krvi".

Inv. Neutr. prvok e v G spĺňa $ae = ea$ a preto patrí aj do H .

Inv. $x^{-1}a = x^{-1}a$ a $e = x^{-1}ax$ $x^{-1} = x^{-1}xa$ $x^{-1} = ax^{-1}$ takže x^{-1} patrí do H .

2. Nech $(H, \circ)$ je grupa. Dokážte, že aj $(H^{\circ}H, \circ)$ je grupa.

Neutrálny prvok e patrí do H . Preto $H = e^{\circ}H \subset H^{\circ}H$.

Na druhej strane, kvôli uzavretosti operácie musí platiť aj $H^{\circ}H \subset H$.

To znamená, že $(H^{\circ}H, \circ) = (H, \circ)$ a je to teda grupa.

3. Dokážte, že nasledujúce prvky majú rovnaký rád:

- a) x, xxy^{-1}
- b) ab, ba
- c) abc, bca

a) Nech $x^n = e$. Potom $(xyx^{-1})^n = yxy^{-1}yxy^{-1}yxy^{-1} \dots yxy^{-1} = yx^n y^{-1} = ye y^{-1} = yy^{-1} = e$

b) Nech $(ab)^n = e$. Potom $(ba)^n = b(ab)^{n-1}a$.

Platí: $a(b(ab)^{n-1}a) = ea = a$
 $(b(ab)^{n-1}a)b = be = b$

Prvok $(ba)^n = b(ab)^{n-1}a$ sa správa ako neutrálny a teda je neutrálny.

4. Dokážte, že izomorfizmus zachováva rád prvku.

Platí $h(e_1) = e_2$.

Ak $x^n = e_1$, potom

$(h(x))^n = h(x^n) = h(e_1) = e_2$