

Príklady

Poznámka: Z praktických dôvodov sú matice zapísané v Matlabovskej konvencii.

1. Je daná grupa G regulárnych matíc 2×2 s operáciou matic. násobenia $*$ a množina $H = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \}$. Overte, či platí $(H, *) \subset (G, *)$.
 2. Je daná grupa G regulárnych matíc 2×2 s operáciou matic. násobenia $*$ a množina $H = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ a } b \neq 0 \}$. Overte, či platí $(H, *) \subset (G, *)$.
 3. Nech $H = \{m/n; m, n \text{ sú prirodzené nepárne}\}$. Dokážte, že $(H, *) \subset (\mathbb{Q}_{\setminus\{0\}}, *)$.
 4.
 - a) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_6, +)$
 - b) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_8, +)$
 - c) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_{12}, +)$
 - d) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_{30}, +)$
 - e) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$
 - f) Nájdite všetky netriviálne podgrupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$
 5. Nájdite čo najmenšiu grupu s operáciou maticového násobenia, ktorá obsahuje prvok:
 - a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 - b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
 6. Je daná množina $S = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$. Zistite, či $(S, *)$ je podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$.
 7. Je daná množina $S = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$ a zobrazenie $h: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (S, *)$ dané predpisom $h(x) = \exp(i2\pi x)$.
 - a) Dokážte, že h je homomorfizmus.
 - b) Nájdite jadro operácie h a dokážte, že je (s operáciou $+$) podgrupou $(\mathbb{R}, +)$.
 8. Je dané pevné prirodzené číslo n a množina $S = \{z \in \mathbb{C}, z^n \in \mathbb{R}^+\}$. Zistite, či $(S, *)$ je podgrupou $(\mathbb{C}_{\setminus\{0\}}, *)$.
-

1. Nech $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$. Definujeme $H = \{x \in G, a^n x = x^n a\}$. Dokážte, že $(H, \circ)$ je podgrupou $(G, \circ)$.
2. Nech $(H, \circ)$ je grupa. Dokážte, že aj $(H^n H, \circ)$ je grupa.
3. Dokážte, že nasledujúce prvky majú rovnaký rád:
 - a) x, yxy^{-1}
 - b) ab, ba
 - c) abc, bca
4. Dokážte, že izomorfizmus zachováva rád prvku.