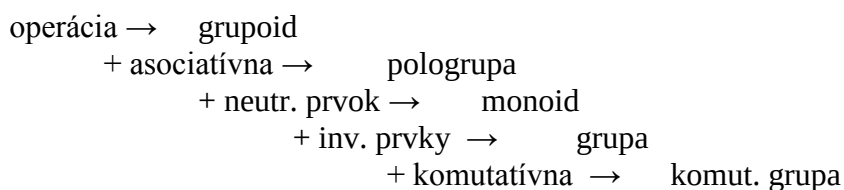


Hierarchia algebraických štruktúr $(M, \circ)$



Príklady

- Určte pozíciu danej alg. štruktúry v hierarchii. Ak to jej veľkosť umožňuje, uveďte príslušnú Cayleyho tabuľku.
 - $(\mathbb{R}^2, \circ)$, kde $(a,b) \circ (c,d) = (a,d)$
 - $(\mathbb{R}^2, \circ)$, kde $(a,b) \circ (c,d) = (ac, ad)$
 - $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \circ)$, kde $x \circ y = 2xy \pmod{7}$ (skúste aj $3xy$, $kxy+m$ pre rozličné k, m)
 - $(M, \cup)$ a $(M, \cap)$, kde $M = 2^X$ (tj. potenčná množina univerza X).
 - Nájdite (ak existuje) izomorfizmus $(M, \cup) \rightarrow (M, \cap)$. (Príklad nadväzuje na 1d)
 - Nájdite (ak existuje) izomorfizmus $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, * \pmod{5}) \rightarrow (\mathbb{Z}_4, + \pmod{4})$.
 - Nech $M = \{0, 1\}$. Koľko rozličných neizomorfných grupoidov $(M, \circ)$ existuje? (Využite svoje riešenie jedného z príkladov z minulého cvičenia)
Koľko rozličných neizomorfných pologrúp $(M, \circ)$ existuje? Vypíšte ich.
Koľko rozličných neizomorfných monoidov $(M, \circ)$ existuje? Vypíšte ich.
Koľko rozličných neizomorfných grúp $(M, \circ)$ existuje? Vypíšte ich.
Koľko rozličných neizomorfných komutatívnych grúp $(M, \circ)$ existuje? Vypíšte ich.
-

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Nech $(X, \circ)$ a $(Y, \cdot)$ sú grupoidy a h je epimorfizmus z X do Y .
Ak $\circ$ je asociatívna, potom aj $\cdot$ je asociatívna.
- Nech $(X, \circ)$ je monoid a e je neutrálny prvok. Ak pre všetky m z X platí $m \circ m = e$, potom $\circ$ je komutatívna.
- Nech operácia $\circ$ je komutatívna. Potom platí $(a \circ b)^n = a^n \circ b^n$, kde $x^n = x \circ x \circ \dots \circ x$.
- Nech $(X, \circ)$ je grupa. Ak $(x \circ x) \circ (y \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y)$, potom $x \circ y = y \circ x$.
(Dokázali ste tým, že $\circ$ je za daných podmienok komutatívna?)
- Každá konečná (!) pologrupa obsahuje idempotentný prvok (tj. $x \circ x = x$).
- Každá grupa s maximálne 5 prvkami je komutatívna.