

Modulárnosť, distributívnosť, komplementárnosť = MDK.

1. Zistite, či je zväz $(D_{60}, |)$, tj. delitele 60 a relácia „delí“, komplementárny.
Pre aké n je $(D_n, |)$ booleovský?

Nie je K., napr. prvok 2 nemá komplement taký, aby $2 \vee 2' = 60$.

Zväz $(D_n, |)$ je booleovský pre také n , ktorého rozklad na prvočinitele obsahuje iba prvočísla v prvej mocnine.

2. Nech M je množina reálnych funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a usporiadanie $f \leq g$ znamená, že $f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Je to zväz? Overte MDK.

Je to zväz. Pre každú dvojicu f, g sa dá definovať bod po bode

$$f \vee g(x) = \max \{f(x), g(x)\}$$

$$f \wedge g(x) = \min \{f(x), g(x)\}$$

Zväz je distributívny (plynie z uvedenej definície supréma a infíma) a teda aj modulárny.
Zväz je nekonečný a nemá najmenší ani najväčší prvok, komplementárnosť sa teda nekoná.

3. Sú zväzy $(D_{50}, |)$ a $(D_{45}, |)$ izomorfné? Overte MDK.

$50 = 2 \cdot 5^2$ a $45 = 5 \cdot 3^2$. Zväzy sú izomorfné, u oboch je Hasseho diagramom „hexagon s uhlopriečkou“.

4. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$. Je $\{M, |\}$ zväz? Overte MDK.

Nie je to zväz, napr. 12 a 18 nemajú jednoznačne určené infimum.

5. Nech $M = \{a, b, c, d\}$ a množina A je množina všetkých podmnožín množiny M s párnym počtom prvkov. Zistite, či $(A, \subseteq)$ je zväz a overte MDK.

Je to zväz a je modulárny (nakreslím a vidím – zväz obsahuje ako svoj podzväz M_5). Nie je distributívny a komplementy jednotlivých prvkov nie sú jednoznačné (tj. slabšia komplementárnosť).

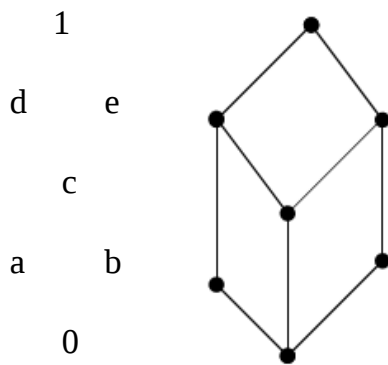
6. Nech $M = \{a, b, c, d, e\}$ a množina A je množina všetkých podmnožín množiny M s nepárnym počtom prvkov. Zistite, či $(A, \subseteq)$ je zväz a overte MDK.

Nie je to zväz, napr. $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ majú až dvoch adeptov na infimum – $\{a\}$, $\{b\}$. Infimum v zmysle definície tu teda neexistuje. Podobne možno nájsť ďalšie sporné dvojice.

7. Pomocou Hasseho diagramov nižšie sú dané ČUM. Overte, či sú to zväzy a či platí MDK.

Cf. kravecova.szm.com/doc/dm1/cum.doc

Označenie bodov je uvedené vľavo od obrázkov.

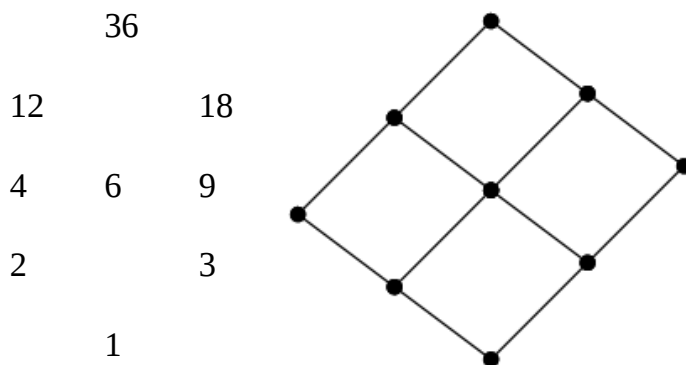


Je to zväz.

Nie je modulárny (potrebná

rovnosť neplatí napr. pre trojicu a,b,d.

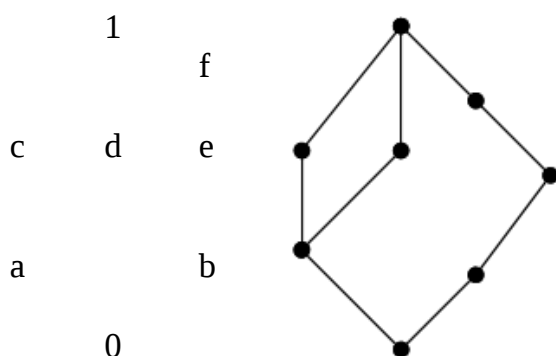
Nie je komplementárny (bod c nemá komplement, neexistuje c' také, že $c \vee c' = 1$)



Uvedená štruktúra môže napríklad reprezentovať zväz deliteľov 36.

Zväz je distributívny (NSN a NSD ako suprérium a infimum vyhovujú podmienkam distributívnosti, ide o analógiu k množinám a zjednoteniu s prienikom).

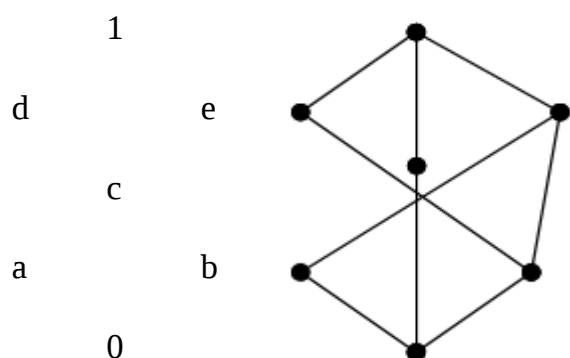
Zväz nie je komplementárny, bod 6 nemá s kým „dočiahnuť“ na 36.



Je to zväz.

Ako podzväz obsahuje N5, nie je teda modulárny ani distributívny.

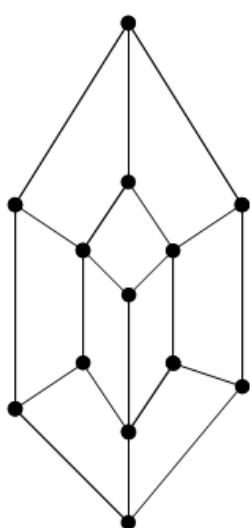
Komplementárny je len v slabšom zmysle (komplementy nie sú jednoznačné).



Je to zváz.

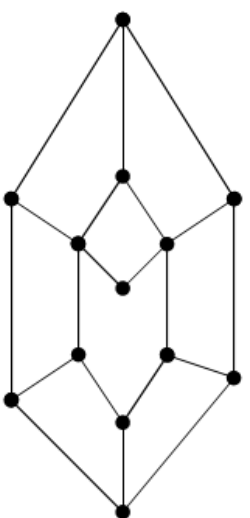
Nie je modulárny (stačí overiť potrebnú rovnosť napr. d, c, e).

Komplementárnosť iba v slabom zmysle.



Je to zváz.

Nie je modulárny ani komplementárny (porov. s prvým obrázkom v tomto príklade).



Nie je to zváz. Bod „v strede“ nie je spojený s najmenším prvkom zvázu.