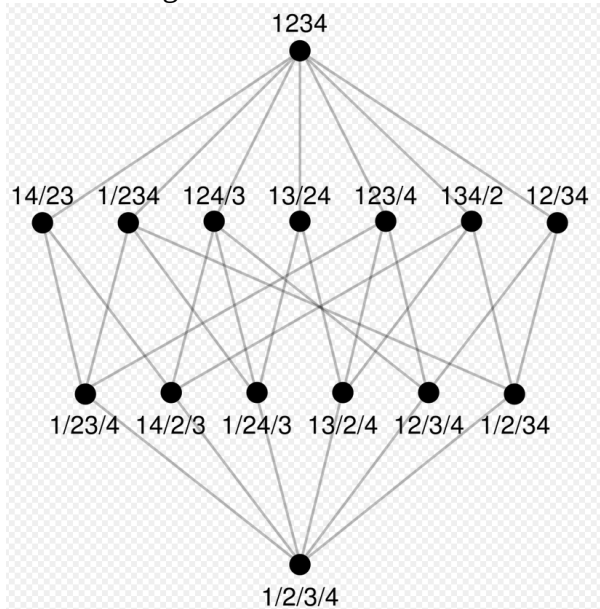


1. Nech X sú všetky možné rozklady množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ na triedy ekvivalencie (tj. na disjunktné podmnožiny, ktorých zjednotenie je M) a relácia ČU je na X daná tak, že $D1 \subseteq D2$ práve vtedy, ak každá trieda z $D1$ je podmnožinou niektorej z tried $D2$.
Overte, či je $(X, \subseteq)$ zväz, určte operácie supréma a infíma, O , I , a nakreslite Hasseho diagram.

Hasseho diagram



[https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_\(order\)#/media/File:Lattice_of_partitions_of_an_order_4_set.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_(order)#/media/File:Lattice_of_partitions_of_an_order_4_set.svg)

Prvky O , I vidno v diagrame. V prípade supréma a infíma treba priamo overiť z obrázku ich existenciu a jednoznačnosť.

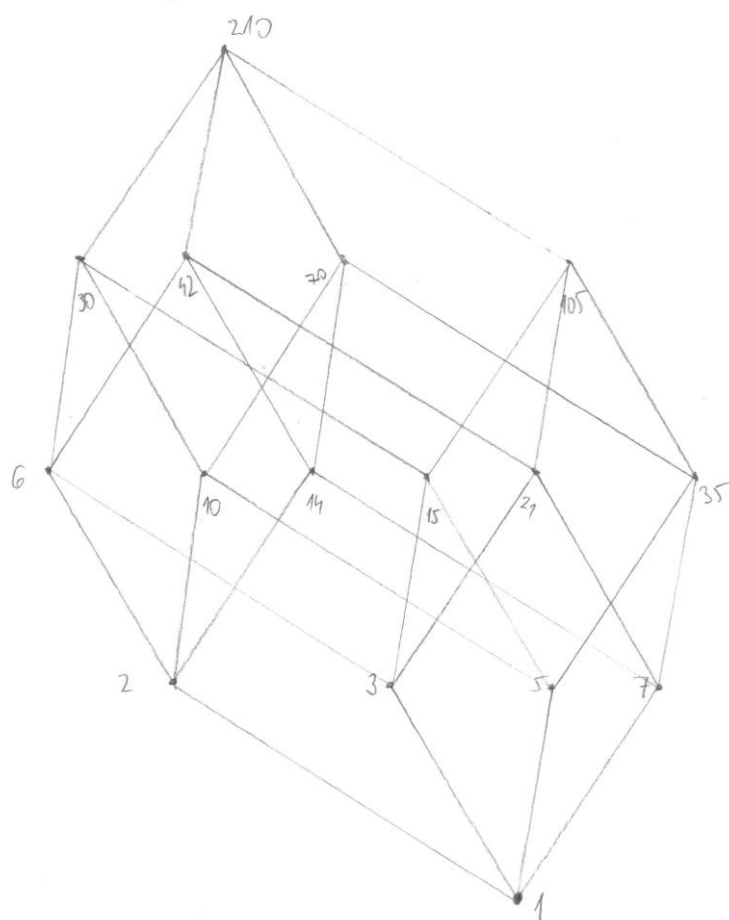
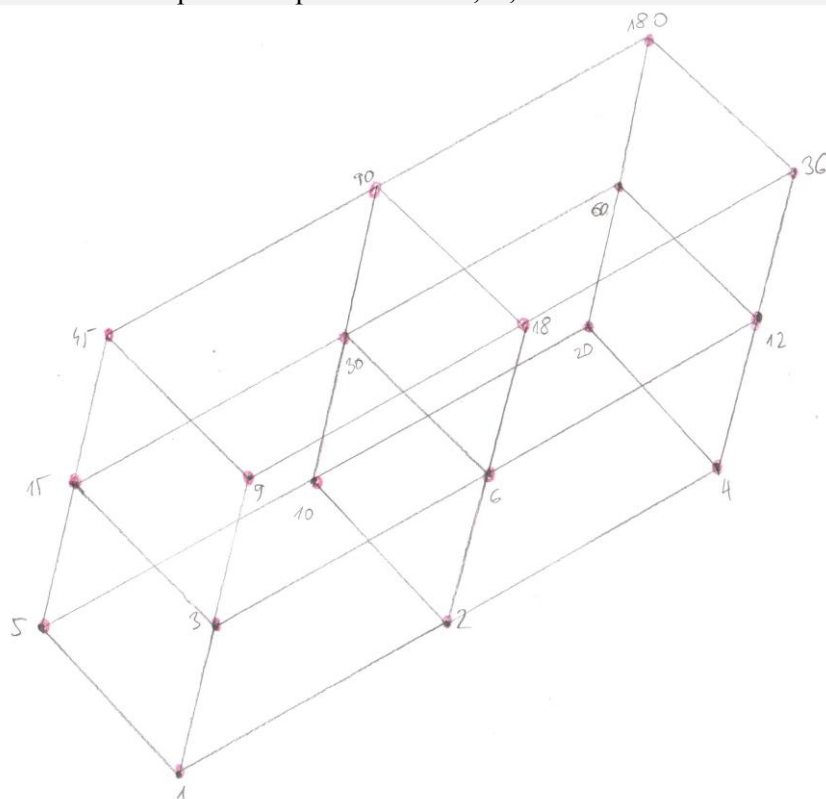
Suprémum pre dva prvky z trojtriedovej úrovne (a, b, c, d je ľubovoľná permutácia 1,2,3,4)

$$\begin{array}{lll} \text{Typ 1 -} & ab/c/d \vee cd/a/b = & ab/cd \\ \text{Typ 2 -} & ab/c/d \vee ac/b/d = & abc/d \end{array}$$

Infímum pre dva prvky z dvojtriedovej úrovne

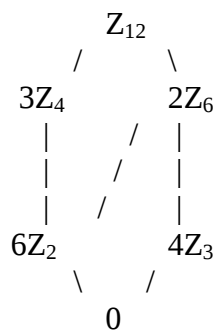
$$\begin{array}{lll} \text{Typ 1 -} & ab/cd \wedge ac/bd = & a/b/c/d \\ \text{Typ 2 -} & ab/cd \wedge a/cbd = & a/b/cd \end{array}$$

2. Nakreslite pekný Hasseho diagram pre zväzy $(\{\text{delitele } 180\}, |)$, $(\{\text{delitele } 210\}, |)$.
Určte operácie suprema a infima, O, I.

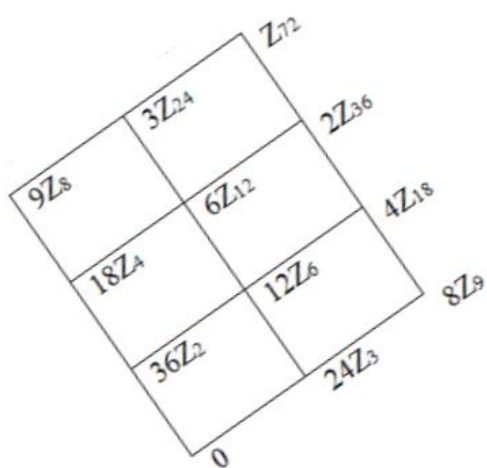


3. Nakreslite Hasseho diagram pre zväz $(X, \subseteq)$, kde X je množina všetkých podgrúp cyklickej grupy a) rádu 12, b) rádu 72. Určte operácie supréma a infima, O , I .

Rád 12 – model Z_{12}



Rád 72 – model Z_{72}



4. Nakreslite Hasseho diagram pre zväz $(X, \subseteq)$, kde X je množina všetkých podgrúp grupy $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$. Určte operácie suprema a infima, O , I .

Najprv získame cyklické podgrupy (rozumne otestujeme prvky grupy ako generátory).

Potom skladaním (každý prvok s každým) rozličných dvojíc (menších) podgrúp nájdeme 2-cyklické podgrupy. Troj-cyklické podgrupy tu nie sú (prečo?).

Z úsporných dôvodov usporiadané dvojice čísel budú zapísané bez zátvoriek, čiarok a medzier.

Podgrupy (podľa počtu prvkov), s označením $n:[g_i]$ (tj. vpočet prvkov : generátory).

$$1:E = \{00\}$$

$$2:[03] = \{03 \quad 00\}$$

$$2:[20] = \{20 \quad 00\}$$

$$2:[23] = \{23 \quad 00\}$$

$$3:[02] = \{02 \quad 04 \quad 00\}$$

$$4:[10] = \{10 \quad 20 \quad 30 \quad 00\}$$

$$4:[13] = \{13 \quad 20 \quad 33 \quad 00\}$$

$$4:[20, 03] = \{23 \quad 20 / \quad 03 \quad 00\} \quad \text{2-cykl.}$$

$$6:[01] = \{01 \quad 02 \quad 03 \quad 04 \quad 05 \quad 00\}$$

$$6:[21] = \{21 \quad 02 \quad 23 \quad 04 \quad 25 \quad 00\}$$

$$6:[22] = \{22 \quad 04 \quad 20 \quad 02 \quad 24 \quad 00\}$$

$$8:[10, 03] = \{13 \quad 10 / \quad 23 \quad 20 / \quad 33 \quad 30 / \quad 03 \quad 00\} \quad \text{2-cykl.}$$

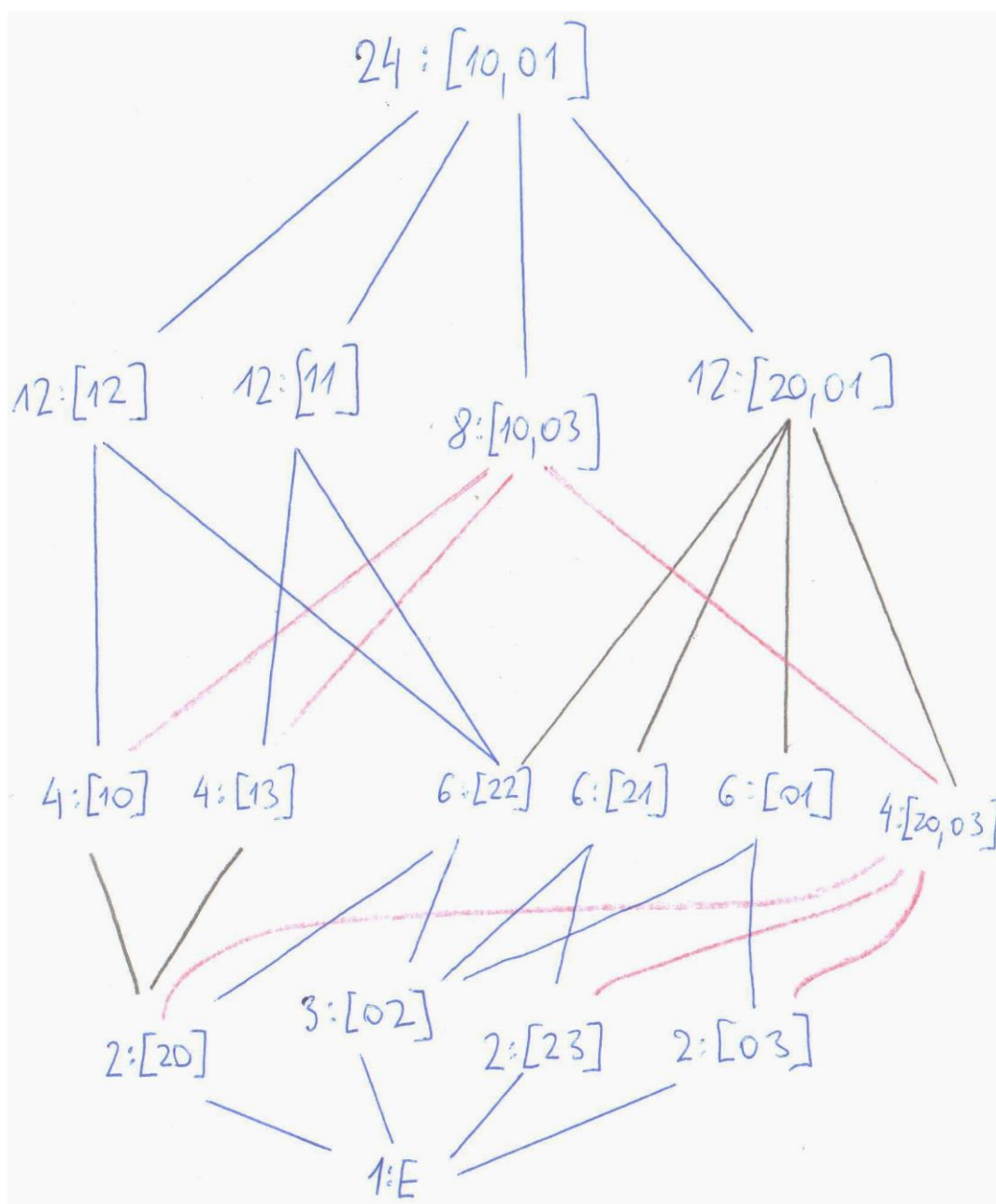
$$12:[11] = \{11 \quad 22 \quad 33 \quad 04 \quad 15 \quad 20 \quad 31 \quad 02 \quad 13 \quad 24 \quad 35 \quad 00\}$$

$$12:[12] = \{12 \quad 24 \quad 30 \quad 02 \quad 14 \quad 20 \quad 32 \quad 04 \quad 10 \quad 22 \quad 34 \quad 00\}$$

$$12:[20, 01] = \{21 \quad 22 \quad 23 \quad 24 \quad 25 \quad 20 / \quad 01 \quad 02 \quad 03 \quad 04 \quad 05 \quad 00\} \quad \text{2-cykl.}$$

$$24:[10, 01] = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$$

Teraz už stačí pozorne naukladať uvedené podgrupy do diagramu.

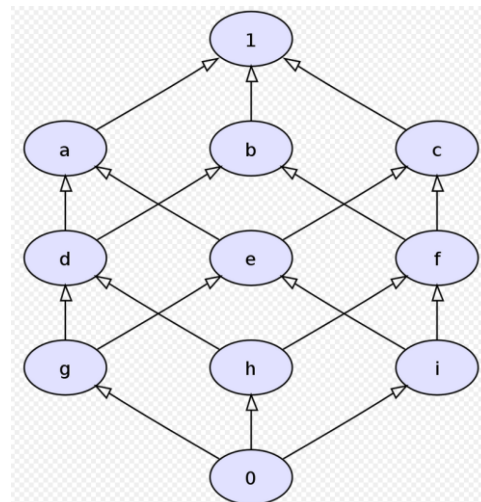


Cf. <https://math.la.asu.edu/~kawski/classes/mat444/handouts/Z4xZ6.gif>

Ďalšie užitočné obrázky a úlohy:

<https://math.la.asu.edu/~kawski/classes/mat444/handouts.html>

5. Na obrázku vpravo je daná ČUM. Overte, či je to zväz. Nahraďte označenia a,b, ..., i, 0, 1, vhodnými číslami tak, aby ste s reláciou “delí” dostali rovnaký Hasseho diagram.



Cf. [https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_\(order\)#/media/File:Pow3nonlattice.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_(order)#/media/File:Pow3nonlattice.svg)

ČUM na obrázku nie je zväz. Napríklad pre body a, b sú kandidáti na infimum d, i – napriek rozličným úrovniám v nákrese (je iba voľbou autora obrázku, že sú úrovne zakreslené práve takto) body d, i nie sú navzájom porovnateľné, infimum teda nie je jednoznačne určené.

Náhrada číslami

$g=2$

$h=3$

$i=5$

$d=42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$e=130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$

$f=165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$

$a=5460 = 42 \cdot 130$

$b=6930 = 42 \cdot 165$

$c=21450 = 130 \cdot 165$