1 Algebraické štruktúry s dvomi binárnymi operáciami

1.1 Okruhy

Budeme uvažovať $M \neq \emptyset$ a dve binárne operácie $\star$ a $\circ$ na M, ktoré sú previazané distributívnym zákonom:

$$\begin{aligned} a \circ (b \star c) =& (a \circ b) \star (a \circ c) \\ a \star (b \circ c) =& (a \star b) \circ (a \star c) \end{aligned}$$

Definícia 1 *Nech $(G, \star)$ je grupa a $G(, \circ)$ je pologrupa. Ak pre $\forall a, b, c \in G$ platí*

$$a \circ (b \star c) = (a \circ b) \star (a \circ c) \tag{1}$$
$$(b \star c) \circ a = (b \circ a) \star (c \circ a) \tag{2}$$

povieme, že platí distributívny zákon pre binárnu operáciu $\star$ vzhľadom na operáciu $\circ$.

Poznámka 1 *Nech $(G, \star)$ je grupa a $G(, \circ)$ je pologrupa, ktoré sú previazané distributívnym zákonom. Potom operáciu $\star$ označujeme $+$ a inverný prvok k prvku a vzhľadom na operáiu $+$ označujeme $-a$. Neutrálny prvok vzhľahom k $+$ označujeme 0, resp. 0_G. Ak existuje neutrálny prvok vzhľadom k operácii $\circ$, potom ho označujeme 1 resp. 1_G. Operáciu $\circ$ nepíšeme $a \circ b = ab$. To znamená, že distributívny zákon je v tvare*

$$\begin{aligned} a(b + c) =& ab + ac \\ (b + c)a =& ba + ca \end{aligned}$$

a súčet $a + (-b)$ označujeme $a - b$ (t.z. $a + (-b) = a - b$).

Symbolom $n \times a$ označujeme $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-krát}$. Analogicky $a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n-krát}$ a $a^{-n} = \underbrace{a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n-krát}$. Pričom $0 \times a = 0$ a $a^0 = 1$.

Tvrdenie 1 *Nech $(G, +, 0)$ je Abelova grupa a $(G, \circ)$ je pologrupa. Ak pre $\forall a, b, c \in G$ platí distributívny zákon pre binárnu operáciu $+$ vzhľadom na operáciu $\circ$ (platia rovnosti (1) a (2)), tak pre $\forall a \in G$*

$$a0 = 0a = 0.$$

Dôkaz Tvr.1 Pretože $(G, +, 0)$ je Abelova grupa, tak pre $a \in G$ platí

$$\begin{aligned} a =& 0 + a \\ aa =& (0 + a)a \\ aa =& 0a + aa \\ 0 =& 0a \end{aligned}$$

Analogicky sa ukáže, že $a0 = 0$. ∎

Definícia 2 *Nech* $(M, +, 0)$ *je Abelova grupa a* $(M, \circ, 1)$ *je pologrupa. Potom* $(M, +, \circ, 0, 1)$ *sa nazýva* okruh*, ak pre* $\forall a, b, c \in M$ *platí*

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ba + ca.$$

Poznámka 2 *Napríklad v [**?**] sa okruhom nazýva trojica* $(M, +, \circ)$*, kde* $(M, +)$ *je Abelova grupa a* $(M, \circ)$ *je len pologrupa. To znamená, že od druhej operácie požadujeme asociatívnosť a distributivitu*

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ba + ca.$$

Takýto okruh budeme nazývať resp. okruh bez jednotky *). Ak vieme, že má jednotku tak sa nazýva* okruh s jednotkou*.*

Definícia 3 *Nech* $(M, +, 0)$ *je Abelova grupa a* $(M, \circ)$ *je binárna operácia s vlastnosťou:* $a \circ b = 0$ *pre* $\forall a, b \in M$*. Potom trojica* $(M, +, \circ)$ *sa nazýva* nulový okruh*.*

Tvrdenie 2 *Nech* $(M, +, \circ)$ *je nulový okruh. Potom pre* $\forall a, b, c \in M$ *platí*

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ba + ca.$$

(Nulový okruh je semi-okruh.)

Dôkaz 1 *Nech* $a, b, c \in M$*. Pretože* $b + c \in M$*, potom* $a(b+c) = 0$*. Pretoze* $ab = 0 = ac$*, potom*

$$ab + ac = 0.$$

Teda

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Analogicky sa dá ukázať $(b+c)a = ba + ca$*.* ∎

Poznámka 3 *Pripomíname, že v prípade okruhu alebo semi-okruhu* $(M, +, \circ)$*, ak* $x \in M$*, potom* $-x$ *je inverzný prvok k prvku* x *vzhľadom na operáciu "+".*

Tvrdenie 3 *Ak* $(M, +, \circ)$ *je semi-okruh, potom pre* $\forall a, b \in M$ *platí*

$$-(ab) = a(-b) = (-a)b \tag{3}$$

$$ab = (-a)(-b). \tag{4}$$

Dôkaz 2 *Najskôr ukážeme rovnosť 3. Pretože* $(M, +, \circ)$ *je semi-okruh, tak pre každé* $a, b, c \in M$ *platí*

$$c = b + (c - b) \tag{5}$$
$$ac = a\,(b + (c - b))\,. \tag{6}$$

Na pravej strane rovnosti 6 použijeme distributivitu a následne využijeme fakt existencie inverzného prvku vzľadom na operáciu "+":

$$\begin{aligned} ac &= a\,(b + (c - b)) \\ ac &= ab + a(c - b) \\ ac - (ab) &= ac + a(-b) \\ -(ab) &= a(-b). \end{aligned}$$

Analogicky sa dá ukázať, že $-(ab) = (-a)b$.

Teraz ukážeme 4. Pretože $ab = -(-(ab))$ *tak použitím 3 dostaneme*

$$ab = -(-(ab)) = -(a(-b)) = (-a)(-b). \blacksquare$$

Definícia 4 *Okruh (resp. semi-okruh)* $(G, +, \circ)$ *nazývame komutatívny, ak* $\forall a, b \in G$ *platí, že* $ab = ba$.

Definícia 5 *Komutatívny okruh* $(G, +, \circ)$ *nazývame oborom integrity, ak* $\forall a, b \in G \setminus \{0\}$ *platí, že* $ab \neq 0$.

Definícia 6 *Okruh* $(G, +, \circ)$ *nazývame telesom, ak* $\forall a \in G\setminus\{0\}$ $\exists a^{-1} \in G$ *s vlastnosťou, že* $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ *(zákon o inverzných prvkoch).*

Definícia 7 *Komutatívne teleso nazývame telesom pole.*

Definícia 8 *Nech* $(G, +, \circ)$ *je okruh a* $a, b \in G\setminus\{0\}$. *Ak* $ab = 0$, *potom* a, b *nazývame delitele nuly.*

Poznámka 4 *Obor integrity je teda komutatívny okruh bez deliteľov nuly.*

Tvrdenie 4 *V okruhu* $(G, +, \circ)$ *platí zákon o krátení súčinu (nenulovým prvkom) práve vtedy ak neexistujú delitele nuly.*

Dôkaz Tvr.4. $\Rightarrow$: Ukážeme sporom. Nech platí zákon o krátení súčinu a a, b sú delitele nuly, teda $ab = 0$ a $a \neq 0$, $b \neq 0$. Vieme, že $0 = a0$ a teda $0 = ab = a0$. Zo zákona o krátení vyplýva, že $b = 0$, čo je spor s predpokladom, že $b \neq 0$.

$\Leftarrow$ Nech v $(G, +, \circ)$ neexistujú delitele nuly. Nech $a \neq 0$ a $ac = ab$. Potom

$$0 = ac - ab = a(c - b).$$

Pretože neexistujú delitele nuly, tak $c - b = 0$ a teda $c = b$. Analogicky sa ukáže, že ak $ca = ba$, potom $b = c$. $\blacksquare$

Definícia 9 *Nech* $(G, +, \circ)$ *a* $(M, +, \circ)$ *sú okruhy. Ak existuje bijekcia* $\phi : G \to M$ *s vlatnosťou, že* $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ *a* $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, *pre* $\forall a, b \in G$, *tak píšeme* $G \approx M$ *a hovoríme, že okruhy sú izomorfné. Izomorfizmus* G *na* G *nazývame autmorfizmu okruhu* G.

Definícia 10 *Okruh* A *nazývame podokruhok okruhu* G, *ak* $A \subseteq G$ *a ak operácie sčitovania a násobenia prvkov okruhu* A *dávajú tie isté výsledky ako sčitovanie a násobenie tých istých prvkov v zmysle okruhu* G. *Okruh* G *nazývame nadokruhom okruhu* A.

Podokruh, ktorý je telesom resp. poľom, nazývame podteleom, resp. podpoľom.

Tvrdenie 5 *Nech* G *je okruh a* $A \subseteq G$. *Potom* A *je podokruhom* G *práve vtedy, ak* A *je uzavretá na rozdiel a súčin. To znamená, že ak* $a, b \in A$, *potom* $a - b, ab \in A$.

Tvrdenie 6 *Nech* G *je teleso a* $A \subseteq G$. *Potom* A *je podteleso* G *práve vtedy, ak* A *je uzavretá na rozdiel, súčin, inverzné prvky a obsahuje jednotku.*

Tvrdenie 7 *Prienik podokruhov okruhu* G *je podokruh okruhu* G.

Tvrdenie 8 *Prienik podtelies telesa* G *je podteleso telesa* G.

Definícia 11 *Hovoríme, že množina* $A \subseteq G$ *generuje okruh* G *ak každý podokruh okruhu* G *obsahujúci* A *sa rovná okruhu* G. *Budeme písať* $[A] = G$.

Tvrdenie 9 *Každá podmnožina* $A \subseteq G$, *kde je* G *je okruh, generuje jednoznačne nejaký podokruh* $[A]$ *okruhu* G.

Tvrdenie 10 *Nech* G *je komutatívny okruh (s jednotkou),* A *je podokruh* G *a* $(1 \in A)$. *Potom pre* $\forall b \in G$ *platí, že* $[A \cup \{b\}] = A[u]$, *kde*

$$A[u] = \{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n;\ n \in N, a_0, a_1, \cdots, a_n \in A\}.$$

Dôkaz Tvr.10 Najskôr ukážeme, že $A[u] \subseteq [A \cup \{b\}]$. Pretože $[A \cup \{b\}]$ je podokruh, tak je uzavretý na násobenie a sčitovanie, teda $a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \in [A \cup \{b\}]$, pre každé $n \in N$, pretože $u, a_0, a_1, \cdots, a_n \in A \cup \{u\}$. Teda $A[u] \subseteq [A \cup \{b\}]$.

Teraz ukážeme opačnú inklúziu: $[A \cup \{u\}] \subseteq A[u]$: Množina $A[u]$ je uzavretá na rozdiel a súčin. Napríklad

$$(a_0 + a_1 u + a_2 u^2) - (b_0 + b_1 u) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)u + a_2 u^2$$

a

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 u + a_2 u^2)(b_0 + b_1 u) &= a_0 b_0 + a_1 b_0 u + a_2 b_0 u^2 + a_0 b_1 u + a_1 b_1 u^2 + a_2 b_1 u^3 \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)u + (a_2 b_0 + a_1 b_1)u^2 + a_2 b_1 u^3.\end{aligned}$$

Teda $A[u]$ je podokruh. Pretože $u = 0 + 1u$ a $a_0 \in A[u]$, tak $A[u]$ je podokruh obsahujúci množinu $A \cup \{u\}$. Preto $[A \cup \{u\}] \subseteq A[u]$.

To znamená, že $[A \cup \{u\}] = A[u]$. ∎

Definícia 12 *Nech $(G, +, \circ)$ je okruh (bez jednotky). Rád prvku $a \in G$ je jeho rád v grupe $(G, +)$.*

Tvrdenie 11 *V okruhu (bez jednotky) bez deliteľov nuly majú všetky nenulové prvky rovnaký rád.*

Dôkaz Tvr.11. Nech $a, b \in G \backslash \{0\}$. Nech rád prvku a je k. To znamená, že $k \times a = 0$. Potom $0 = (k \times a)b = k \times ab = a(k \times b)$. Z vety o krátení vyplýva, že $k \times b = 0$. ∎

Poznámka 5 *Nech $a, b \in G \backslash \{0\}$ a nech rád prvku a je 3. Potom $3 \times a = a + a + a = 0$. Teda $0 = (a + a + a)b = ab + ab + ab = a(b + b + b) = a(3 \times b)$. Pretože $a \neq 0$, tak $3 \times b = 0$.*

Definícia 13 *Nech $(G, +, \circ)$ je okruh. Charakteristika okruhu (bez jednotky) je najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí $k \times a = 0$, pre $\forall a \in G$. (Charakteristika okruhu (bez jednotky) je teda najmenší spoločný násobok rádov všetkých prvkov okruhu G.) Ak také čísko neexistuje hovoríme, že má rád nekonečno (∞).*

Tvrdenie 12 *Charakteristika okruhu (bez jednotky), ktorý nemá deliteľov nuly je buď prvočíslo, alebo ∞. V pripade okruhu s jednotkou je chrakteristika okruhu rád prvku 1.*

Cvičenie 1 *Nájdite charakteristiky okruhov: $(Z_{12}, +, .)$, $(Z_6, +, .)$, $(Z_8, +, .)$, $(Z_7, +, .)$, $(Z_5, +, .)$*

Napríklad v $(Z_6, +, .)$ je rád prvku 2 rovný 3 a rád prvku 1 rovný 6. Rád prvku 0 je 1.

Cvičenia

Cvičenie 2 *Zistite, či je daná množina M s operáciami $+, .$ (tradičné sčitovanie a násobenie) okruh, či je bez alebo s jednotkou, či je bez deliteľov nuly, či je grupou vzhľadom na druhú z operácií, či je druhá z operácií komutatívna.*

1. *$M = 2Z$;*
2. *$M = Z^2$;*
3. *$M = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in Z\}$;*
4. *Overte či $M = Z_5 \times Z_6$ je okruh (s jednotkou, bez jednotky). Nájdite delitele nuly, ak existujú, ak oporácie $+$ a $\circ$ sa definujú po zložkách (napr. $(4, 3) + (2, 3) = (1, 0)$ a $(4, 3) \circ (2, 3) = (3, 3)$).*
5. *Overte či $M = Z_5 \times Z_3$ je okruh, ak oporácie $+$ a $\circ$ sa definujú po zložkách (napr. $(4, 2) + (2, 2) = (1, 1)$, $(4, 2) \circ (2, 2) = (3, 1)$). je okruh (s jednotkou, bez jednotky). Nájdite delitele nuly, ak existujú.*
6. *Overte či $M = Z_2^3$ je okruh, ak oporácie $+$ a $\circ$ sa definujú po zložkách. Nájdite delitele nuly, ak existujú.*

Cvičenie 3 *Zistite, či A je podokruh okruhu G.*

1. $G = Z_6$, $A = 2Z_3$. *Operácie* $+, .$ *sú štandardné plus, krát;*
2. $G = T \times T$, $A = T \times \{0\}$. *Množina T, operácie* $+, .$ *nie sú bližšie určené.*

Cvičenie 4 *Nech G je okruh bez deliteľov nuly. Dokážte, že ak* $a.b = 1$, *potom* $b.a = 1$.

Cvičenie 5 *Nech* $(G, +, .)$ *je okruh. Definujeme operáciu* $a \odot b = b.a$. *Dokážte, že* $(R, +, \odot)$ *je okruh.*

Cvičenie 6 *Nech* $X \neq \emptyset$ *a* $M = 2^X$. *Binárna operácia* $\triangle$ *na M je symetrická diferencia množín:* $E \triangle F = (E \cap F^c) \cup (E^c \cap F)$. *Sú nasledujúce algebraické štruktúry sú okruhy? Ak áno, tak zistite, či sú komutatívne a majú jednotku. a)* $(M, \triangle, \cap)$; *b)* $(M, \triangle, \cup)$.

Cvičenie 7 *Nech* $(G, \star)$ *je cyklická grupa s generátorom a, tj.*

$$G = \{a, a^2, a^3, \cdots, a^{n-1}, e\}.$$

Definujeme operáciu $a^p \circ a^q = a^{pq}$. *Dokážte, že* $(G, \star, \circ)$ *je komutatívny okruh s jednotkou.*

Homomorfizmy na okruhoch

Cvičenie 8 *Nech* $(G, +, \circ)$ *je okruh a* $f : G \times G \to G$ *s vlastnosťou, že* $f(a, b) = a$, *pre* $\forall a, b \in G$. *Zistite či f je homomorfizmus okruhov.*

Cvičenie 9 $M = \{funkcie\ z\ intervaluI \to R\}$, $x \in I$ *a* $f_x : R \to R$, $f_x(g) = g(x)$. *Dokážte, že f je homomorfizmus okruhov.*

Cvičenie 10 *Zistite, či sú izomorfné* $(2Z, +, .)$ *a* $(3Z, +, .)$.

Cvičenie 11 *Je dané zobrazenie* $f : (Z, +, .) \to (Z_n, +, .)$, $f(x) = kx\ mod[n]$. *Zistite, pre ktoré dvojice prirodzených čísel k, n je dané f homomorfizmus okruhov.*

2 Algebraické štruktúry s reláciou a operáciami

Poset

Nech $M \neq \emptyset$ a nech $\alpha \subseteq M^2$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna je relácia na M. Relácia α je teda reláciou usporiadania a ak $(a, b) \in \alpha$, tak píšeme $a \leqslant b$, resp. $a \subseteq b$, $a \sqsubseteq b$, atď. Dvojici $(M, \leqslant)$ hovoríme čiastočne usporiadaná množina (ČUM), alebo poset (partially ordered set).

Cvičenie 12 *Nech* $X = \{a, b, c\}$ *a* $M = 2^X$, *potom*

$$M = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

$(M, \subseteq)$ *je ČUM. Vidíme, že napríklad* $\{a\} \subseteq \{a, b\}$, *ale* $\{c\}$ *nie je v relácii s* $\{a, b\}$

Zväzy

- binárne oprácie $\vee$, $\wedge$
- overovanie vlastností o aký ty zväzu ide
- modulárny zväz
- distributívny zväz
- boolova algebra - vlatnosti, príklady, homorfizmus z Boolovej algebry do Boolovej algebry, izomfizmus Boolových algebier

Definícia 14 *Nech $(M, \leqslant)$ je POSET (ČUM) a $x, y \in M$.*

a) Prvok $b \in M$ sa nazýva dolné ohraničenie prvkov x, y, ak $b \leqslant x$ a zároveň $b \leqslant y$.

b) Prvok $m \in M$ sa nazýva priesek (infímum, join) ak m je maximálne dolné ohraničenie, to znamená, že pre každé dolné ohraničenie b prvkov x, y platí $b \leqslant m$. Teda m je priesek x, y ($m = x \wedge y$) ak $m \leqslant x$ a $m \leqslant y$ a naviac ak $b \leqslant x$ a $b \leqslant y$ potom $b \leqslant m$.

Definícia 15 *Nech $(M, \leqslant)$ je POSET (ČUM) a $x, y \in M$.*

a) Prvok $c \in M$ sa nazýva horné ohraničenie prvkov x, y, ak $x \leqslant c$ a zároveň $y \leqslant c$.

b) Prvok $u \in M$ sa nazýva suprémum ak u je minimálne horné ohraničenie, to znamená, že pre každé horné ohraničenie c prvkov x, y platí $u \leqslant c$. Teda u je spojenie (suprémum) x, y ($u = x \vee y$) ak $x \leqslant u$ a $y \leqslant u$ a naviac ak $x \leqslant c$ a $y \leqslant c$ potom $u \leqslant c$.

Poznámka 6 *Spojenie a priesek nemusia vždy na nejakej čiastočne usporiadanej množine existovať. Niekedy existuje, len jeden z nich.*

Nech $M = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$. Potom $(M, \subseteq)$ je POSET, kde $\{1,2\} \wedge \{2,3\}$ neexistuje v M, ale $\{1,2\} \vee \{2,3\} = \{1,2,3,4\}$.

Cvičenie 13 *Nech $M = \{a, b, c\}$ a $\alpha = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (b,c)\}$ a $\beta = \{(a,a), (b,b), (c,c), (c,a), (c,b)\}$. Zistite, či relácie α a β sú reláciami usporiadania na M a či existuje $x \vee y$, $x \wedge y$ pre $\forall x, y \in M$ vzhľadom na jednotlivé relácie α a β. Znázornite relácie na Hasseho diagrame a aj pomocou maticovej reprezentácie.*

Definícia 16 *Nech $(M, \leqslant)$ je ČUM. Ak pre kaďé dva prvky $x, y \in M$ existuje $x \vee y, x \wedge y \in M$, potom štvoricu $(M, \leqslant, \vee, \wedge)$ nazývame zväzom.*

Definícia 17 *Nech $(M, \leqslant)$ je ČUM.*

d) Ak existuje prvok $d \in M$ s vlastnosťou, že $\forall a \in M$ $d \leqslant a$, tak d sa nazýva dolné univerzálne ohraničenie a označujeme ho 0 resp. 0_M.

h) Ak existuje prvok $h \in M$ s vlastnosťou, že $\forall a \in M$ $a \leqslant h$, tak h sa nazýva horné univerzálne ohraničenie a označujeme ho 1 resp. 1_M.

Definícia 18 *Nech $(M, \leqslant)$ je ČUM. Ak pre $\forall x, y \in M$ platí, že $x \leqslant y$ alebo $y \leqslant x$, tak M nazývame reťazec.*

Tvrdenie 13 *Každý konečný reťazec má univerzálne dolné aj horné ohraničenie.*

Tvrdenie 14 *Každý konečný n-prvkový reťazec je izomorfný s množinou $\{1, 2, \cdots, n\}$.*

Cvičenie 14 *Nech $X \neq \emptyset$ a $M = 2^X$. Overte, že $(M, \subseteq, \cup, \cap)$ je zväz s s dolným univerzálnym ohraničením $\emptyset$ a horným univerzálnym ohraničením X.*

Cvičenie 15 *Overte, že funkcia $\min(x, y) = x \wedge y$ a $\max(x, y) = x \vee y$, ak $x, y \in R$.*

Tvrdenie 15 **Zväzove identity:** *Nech $(M, \leqslant)$ je ČUM. Ak pre nejaké $x, y, z \in M$ existuje $\vee, \wedge$, potom platí:*

(L1) $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$ *(idempotentnosť);*

(L2) $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$ *(komutativita);*

(L3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ *(asociativita);*

(L4) $x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x$ *(absorcia),*
$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x \wedge y = x$ *a* $x \vee y = y$ *(konzistencia).*

Cvičenie 16 *Sú dané zväzy $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ a $(D_{30}, |)$ (D_n označuje množinu deliteľov čísla n: a) Načrtnite Hasseho diagramy oboch zväzov a ukážte, že sú izomorfné. b) Koľko rozličných izomorfizmov existuje medzi oboma zväzmi? c) Pre aké n existuje k $(D_n, /)$ izomorfná paralela $(2^X, \leqslant)$?*

Cvičenie 17 *Je dané zobrazenie $f : (R, \leqslant) \to (Z, \leqslant)$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (zaokrúhlenie nadol). Overte, či je to homomorfizmus.*

Cvičenie 18 *Sú dané zväzy $R_1 = (D_{30}, \leqslant)$ a $R_2 = (D_{30}, |)$ a zobrazenie $f : R_1 \to R_2$, $f(x) = x$. Je f homomorfizmus?*

Cvičenie 19 *a) Načrtnite Hasseho diagram pre všetky podgrupy cyklickej grupy rádu 12 (usporiadanie inklúziou) . Je to zväz? Nájdite príklady iných zväzov izomorfných s týmto zväzom. b) to isté ako v a) pre rád* 72

Cvičenie 20 *Načrtnite Hasseho diagram pre ČUM* $(\{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}, |)$. *Je to zväz?*

Cvičenie 21 *Nájdite všetky n-prvkové zväzy (len abstraktné Hasseho diagramy neizomorfných vzorov) pre* $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Poznámka 7 *Zväzy zapisujeme ako ČUM, teda (množina , relácia usporiadania). Rovnocenným zápisom je tiež tvar (množina, supremum, infimum). Zapíšte zväzy z príkladov (vyššie i nižšie uvedených) aj týmto druhým spôsobom.*

Zväzy - modulárny, distributívny, boolovský

Cvičenie 22 *Zistite, či je daný zväz modulárny, distributívny, boolovský. Ak je zväz boolovský, nájdite jeho izomorfnú paralelu* $(B_n, ?)$, *kde* $B = \{0, 1\}$.

1. $M5$.
2. $N5$.
3. $(D_{30}, |)$.
4. $(D_{12}, |)$. *Pre ktoré* n *je* $(D_n, |)$ *boolovský zväz a prečo?*
5. $(2^X, \subseteq)$
6. *Nech* $X = \{a, b, c, d\}$ *a* $G = \{A \subseteq X;\ |A| = 2k\}$. $(G, \subseteq)$. *Vysvetlite, prečo v príklade 6 vychádzajú iné závery ako v pr. 5.*