

Skladanie permutácií

Sú dané permutácie p, q .

Ich zloženie, zapísané v tvare $p \circ q$ (stručne pq), budeme vykonávať zľava doprava, teda najprv sa vykoná preusporiadanie podľa predpisu p a následne sa výsledok preusporiada podľa q .

V odbornej literatúre možno nájsť aj opačnú možnosť.

Postup skladania vysvetlíme na konkrétnom príklade.

Príklad 1

$$p = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

$$q = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{array}$$

Nájdite $p \circ q$.

Riešenie A

Zapíšeme permutácie pod seba:

$$p = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$
$$q = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{array}$$

Druhý riadok v p budeme chápať ako „náklad“ na číslach v prvom riadku q .

Druhý riadok q je preusporiadaním prvého riadku v q . Pod druhý riadok zapíšeme „náklad“, s ktorým sú jednotlivé čísla zviazané:

$$p = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$
$$q = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{array}$$

Výsledkom je prvý a posledný riadok vyššie uvedenej schémy:

$$p \circ q = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{array}$$

Riešenie B

Iný postup využíva zápis permutácií ako disjunktných cyklov.

$$p = (1\ 2\ 5\ 3\ 4)$$

$$q = (1\ 3\ 5\ 4\ 2)$$

$$p \circ q = (1\ 2\ 5\ 3\ 4)(1\ 3\ 5\ 4\ 2)$$

Výsledok budeme hľadať postupne čítaním sprava doľava.

1. krok – začneme od 1:

(1

2. krok

$$(1\ 2\ 5\ 3\ 4)(1\ 3\ 5\ 4\ 2)$$

Postupujeme sprava – nájdeme prvú 1 sprava a vidíme, že za ňou nasleduje 3.

Pokračujeme od tohto miesta doľava. Hľadáme najbližšiu 3 a vidíme, že je za ňou 4.

Máme teda ~~134~~ a ponecháme si len tú 4.

(1 4

3. krok

$$(1\ 2\ 5\ 3\ 4)(1\ 3\ 5\ 4\ 2)$$

Postupujeme sprava – nájdeme prvú 4 sprava a vidíme, že za ňou nasleduje 2.

Pokračujeme od tohto miesta doľava. Hľadáme najbližšiu 2 a vidíme, že je za ňou 5.

Máme teda ~~425~~ a ponecháme si len tú 5.

(1 4 5

4. krok

$$(1\ 2\ 5\ 3\ 4)(1\ 3\ 5\ 4\ 2)$$

Nájdeme prvú 5 sprava a vidíme, že za ňou nasleduje 4.

Pokračujeme od tohto miesta doľava. Hľadáme najbližšiu 4 a vidíme, že je za ňou 1.

Máme teda ~~541~~ a ponecháme si len tú 1. Cyklus môžeme uzavrieť.

(1 4 5)

5. krok

(1 2 5 3 4) (1 3 5 4 2)

Pokračujem od čísla 2 (ešte nebolo).

Nájdeme prvú 2 sprava a vidíme, že za ňou nasleduje 1. Pokračujeme od tohto miesta doľava.

Hľadáme najbližšiu 1 a vidíme, že je za ňou 2. Máme triviálny cyklus (2).

6. krok

(1 2 5 3 4) (1 3 5 4 2)

Pokračujem od čísla 3 (ešte nebolo). Je zrejmé, ako to dopadne, ale kvôli porozumeniu veci aspoň na prvýkrát dotiahnime algoritmus do konca.

Nájdeme prvú 3 sprava a vidíme, že za ňou nasleduje 5. Pokračujeme od tohto miesta doľava.

Hľadáme najbližšiu 5 a vidíme, že je za ňou 3. Máme triviálny cyklus (3).

Výsledok je teda $p \circ q = (1\ 4\ 5)$

Rýchle porovnanie s postupom A – vyšiel rovnaký výsledok.

Poznámka: Nedajte sa odradiť zdĺhavým opisom postupu B – podstata je jednoduchá a keď ju pochopíte, pôjde to veľmi rýchlo.

Príklad 2

$$p = (13)(245)(78)$$

$$q = (16)(238)(457)$$

Nájdite $p \circ q$.

Riešenie

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(16$$

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(163$$

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(1637$$

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(16375$$

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(163758$$

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(1637584$$

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(16375842$$

$$p \circ q = (13)(245)(78)(16)(238)(457)$$

$$(16375842)$$

Hotovo.

$$p \circ q = (16375842)$$