

Priezvisko: Meno:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ	Sem.	$\Sigma\Sigma$	Známka

- (1) Nech $(P, \leq)$ je poset, nech $\sim$ je relácia ekvivalencie na P . Definujme na $P/\sim$ reláciu $\sqsubseteq$ takto:

$$[x]_{\sim} \sqsubseteq [y]_{\sim} :\Leftrightarrow \text{ existujú } x_1 \sim x \text{ a } y_1 \sim y \text{ také, že } x_1 \leq y_1$$

- (a) Dokážte, že $\sqsubseteq$ je vždy reflexívna relácia na $P/\sim$.
 (b) Nájdite taký konečný poset $(P, \leq)$ a ekvivalenciu $\sim$ na P , aby $\sqsubseteq$ nebola antisymetrická. Dokážte to.
 (c) Nájdite taký konečný poset $(P, \leq)$ a ekvivalenciu $\sim$ na P , aby $\sqsubseteq$ nebola tranzitívna. Dokážte to.

Ekvivalencie naznačte na diagramoch posetov ako rozklady.

- (2) **Teória:** Definujte kongruenciu na zväze.

Nech L je distributívny zväz, nech $a, b \in L$ sú také, že $a \leq b$. Definujme reláciu $\Theta_{a,b}$ na L takto:

$$x_1 \Theta_{a,b} x_2 :\Leftrightarrow x_1 \wedge a = x_2 \wedge a \text{ a zároveň } x_1 \vee b = x_2 \vee b$$

- (a) Dokážte, že $\Theta_{a,b}$ je kongruencia. Nemusíte dokazovať, že to je ekvivalencia, to berieme ako zrejmé.
 (b) Dokážte, že $a \Theta_{a,b} b$.
 (c) Vysvetlite, ako vyzerá $L/\Theta_{a,b}$ v prípade, že L je reťazec.
 (d) Nech L je zväz $(2^{\{1,2,3\}}, \cap, \cup)$, položme $B = \{1, 2\}$, $A = \{2\}$. Nájdite rozklad $2^{\{1,2,3\}}/\Theta_{A,B}$ a nakreslite diagram príslušného faktorového zväzu. (Pomôcka: Postupujte systematicky. Vyrátajte hodnoty $X \cap A$ a $X \cup B$ pre všetky $X \in 2^{\{1,2,3\}}$. Potom je to už ľahké.)

- (3) **Teória:** Definujte podzväz.

Nech $\mathbb{P}$ je množina všetkých bodov v rovine. Nech $L \subseteq 2^{\mathbb{P}}$ je systém množín, ktorý obsahuje práve množiny

- $\emptyset$ a $\mathbb{P}$,
- všetky jednoprvkové podmnožiny $\mathbb{P}$ (t.j. body),
- všetky priamky.

Uvažujme zväz $(L, \subseteq)$. V ďalšom prirodzene stotožňujeme každý bod X s množinou $\{X\}$.

- (a) Nech A, B, C, D sú vrcholy štvorca so stranou dlhšou ako 0. Nájdite podzväz zväzu $(L, \subseteq)$ generovaný množinou $\{A, B, C, D\}$ a nakreslite jeho diagram a aj príslušný „geometrický obrázok“ (body, priamky v rovine patriace do toho generovaného zväzu). Prvky generovaného zväzu označujte ako chcete.

- (b) Vysvetlite (stačí kresliť), prečo platí toto: Ak $\{A, B, C, D\}$ sú navzájom rôzne vrcholy lichobežníka, ktorý nie je rovnobežníkom, potom podzväz zväzu $(L, \subseteq)$ generovaný množinou $\{A, B, C, D\}$ je nekonečný.
- (4) **Teória:** Napíšte vetu vyjadrujúcu vzťah medzi homomorfizmami a kongruenciami grúp.
- (a) Dokážte, že ak $(G, .)$ je komutatívna grupa, potom zobrazenie $\phi : G \rightarrow G$ dané predpisom $\phi(x) = x.x$ je homomorfizmus grúp.
- (b) Dokážte, že ak $(G, .)$ je komutatívna grupa, potom relácia Θ na G daná predpisom

$$x_1 \Theta x_2 :\Leftrightarrow x_1.x_1 = x_2.x_2$$

je kongruencia na G .

- (c) Nakreslite Cayleyho tabuľku $\mathbb{Z}_4/\Theta$, kde Θ je taká, ako v bode (b). Pripomínam, že $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ je grupa s operáciou $\oplus$ danou takto:

$$a \oplus b = (a + b) \bmod 4,$$

kde $\bmod 4$ označuje zvyšok po delení 4.

- (5) **Teória:** Aký je vzťah medzi normálnymi podgrupami grupy a jej kongruenciami?

Uvažujme grupu $Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$, ktorej Cayleyho tabuľka je

.	-1	-i	-j	-k	1	i	j	k
-1	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
-i	i	-1	k	-j	-i	1	-k	j
-j	j	-k	-1	i	-j	k	1	-i
-k	k	j	-i	-1	-k	-j	i	1
1	-1	-i	-j	-k	1	i	j	k
i	-i	1	-k	j	i	-1	k	-j
j	-j	k	1	-i	j	-k	-1	i
k	-k	-j	i	1	k	j	-i	-1

Prezradím, že každá podgrupa $(Q_8, .)$ je normálna (nedokazujte to, berte to ako fakt).

- (a) Nájdite jednu dvojprvkovú a jednu štvorprvkovú podgrupu grupy $(Q_8, .)$.
- (b) Nájdite 2 netriviálne kongruencie Θ_1, Θ_2 grupy $(Q_8, .)$ a nakreslite Cayleyho tabuľky príslušných faktorových grúp $(Q_8/\Theta_1, .)$, $(Q_8/\Theta_2, .)$.