PRÍKLADY

(1) Dokážte, že množiny sú spočítateľné a (ak viete) zostrojte bijekciu buď $f: A_i \to \mathbb{N}$ alebo $f: \mathbb{N} \to A_i$. Ak to ide, nájdite aj explicitný predpis (vzorec) pre f.
   (a) $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$.
   (b) $A_{\frac{3}{2}} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\}$.
   (c) $A_2 = \{\{2n, 2n+1\} : n \in \mathbb{N}\}$.
   (d) $A_{2\frac{1}{3}} = \mathbb{N} \cup \{-k, -k+1, \dots, -1\}$, $k \in \mathbb{N}^+$.
   (e) $A_{2\frac{2}{3}} = \mathbb{N} \cup B_2$, kde B_2 je konečná podmnožina $\mathbb{Z}$.
   (f) $A_3 = B_1 \cup B_2$, kde B_1 je spočítateľná a B_2 je konečná (pozor na možnosť $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$).
   (g) $A_4 = B_1 \cup B_2$, kde B_1, B_2 sú spočítateľné a $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.
   (h) $A_5 = B_1 \cup B_2$, kde B_1, B_2 sú spočítateľné. (Využite predošlé dva výsledky, pozor na všetky možnosti pre konečnosť/nekonečnosť $B_1 \cap B_2, B_1 \setminus B_2, B_2 \setminus B_1$). $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočítateľná.)
   (i) $A_7 = \{F \subseteq \mathbb{N} : F \text{ je konečná}\}$. (Tuto treba použiť axiómu výberu a C-B vetu. Pri zostrojovaní surjekcie $\mathbb{N} \to A_7$ je možné tvorivo využiť zápis čísla v trojkovej sústave, dvojky sa dajú chápať ako oddeľovače v sekvencii reťazcov núl a jednotiek. Skúste vymyslieť aj nejaký iný spôsob. Dá sa dokázať, že bez axiómy výberu sa nezaobídeme.)

(2) Dokážte, že množiny A_i, B_i majú rovnakú mohutnosť tak, že zostrojíte bijekciu.
   (a) $A_1 = \mathbb{R}$, $B_1 = (-\infty, 0)$.
   (b) $A_2 = (-\infty, 0)$, $B_2 = (3, \infty)$.
   (c) $A_3 = \mathbb{R}$, $B_3 = (3, \infty)$ (ako si ušetriť robotu?).
   (d) $A_4 = (1, 2)$, $B_4 = (-5, 4)$.
   (e) $A_5 = \mathbb{R}$, $B_5 = (1, 2)$.
   (f) $A_6 = (-5, 4)$, $B_6 = \mathbb{R}$.

(3) Dokážte, že množiny A_i, B_i majú rovnakú mohutnosť. Môžete využiť C-B vetu a nemusíte zostrojiť bijekciu.
   (a) $A_1 = (0, 1\rangle$, $B_1 = (0, 1)$.
   (b) $A_2 = (-1, 1\rangle$, $B_2 = \mathbb{R}$.
   (c) $A_3 = \langle -1, 1\rangle$, $B_3 = (0, \infty)$.